

CAPÍTULO 10

Método del trabajo virtual



CAPÍTULO 10 MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

- 10.1 Introducción
- 10.2 Trabajo de una fuerza
- 10.3 Principio del trabajo virtual
- 10.4 Aplicaciones del principio del trabajo virtual
- 10.5 Máquinas reales. Eficiencia mecánica
- 10.6 Trabajo de una fuerza durante un desplazamiento finito
- 10.7 Energía potencial
- 10.8 Energía potencial y equilibrio
- 10.9 Estabilidad del equilibrio

*10.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores los problemas relacionados con el equilibrio de cuerpos rígidos se resolvieron al considerar que las fuerzas aplicadas sobre los mismos estaban balanceadas. Se plantearon y resolvieron las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M_A = 0$ para determinar el valor de las incógnitas. Sin embargo, un método que ha resultado ser más eficiente para resolver cierto tipo de problemas de equilibrio es el basado en el *principio de trabajo virtual*, el cual fue utilizado por primera vez en el siglo XVIII por el matemático suizo Jean Bernoulli.

Como se verá en la sección 10.3, el principio del trabajo virtual establece que si a una partícula o un cuerpo rígido o en general un sistema de cuerpos rígidos unidos, los cuales están en equilibrio bajo la acción de varias fuerzas externas, se les aplica un desplazamiento arbitrario a partir de la posición de equilibrio, el trabajo realizado por las fuerzas externas durante el desplazamiento será cero. Este principio es efectivo cuando se aplica a la solución de problemas relacionados con el equilibrio de máquinas o mecanismos que están constituidos por varios elementos conectados entre sí.

En la segunda parte del capítulo se aplicará el método del trabajo virtual en forma alternativa basada en el concepto de *energía potencial*. En la sección 10.8 se estudiará que si una partícula, cuerpo rígido o sistema de cuerpos rígidos están en equilibrio, la derivada de la energía potencial con respecto a la variable que define la posición debe ser cero.

También en este capítulo se aprenderá a evaluar la eficiencia mecánica de una máquina (sección 10.5) y poder determinar si la posición de equilibrio es estable, inestable o neutra (sección 10.9).

*10.2. TRABAJO DE UNA FUERZA

Primero se definirán los conceptos de *desplazamiento* y *trabajo* como se usan en la mecánica. Considere que la partícula mostrada (figura 10.1) se mueve del punto A a un punto cercano A'. Si con $\mathbf{r}$ se denota el vector de posición correspondiente al punto A, el pequeño vector que une a A con A' debe representarse con el diferencial $d\mathbf{r}$; al vector $d\mathbf{r}$ se le llama *desplazamiento* de la partícula. Suponga que sobre la partícula actúa una fuerza $\mathbf{F}$, el *trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ correspondiente al desplazamiento $d\mathbf{r}$* se define como la cantidad

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.1)$$

la cual se obtiene al formar el producto escalar del vector de fuerza $\mathbf{F}$ con el vector de desplazamiento $d\mathbf{r}$. Si se representan con F y ds las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento, respectivamente, y con α el ángulo que forman los vectores $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$ y, recordando la definición del producto escalar de dos vectores (sección 3.9), se escribe

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (10.1')$$

Como el trabajo es una *cantidad escalar*, éste tiene magnitud y signo pero no dirección. También note que el trabajo debe estar expresado en unidades obtenidas al multiplicar unidades de longitud por unidades de fuerza. Así, en el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos el trabajo se expresa en unidades de ft · lb o in. · lb. Pero si se

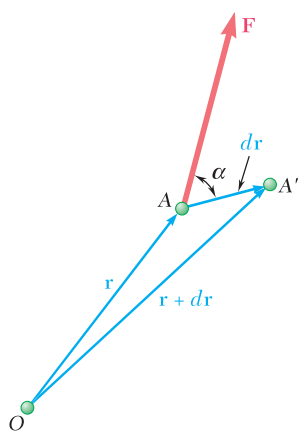


Figura 10.1

usan unidades del SI, entonces el trabajo se expresa en $\text{N} \cdot \text{m}$. A esta unidad se le denomina *joule* (J).[†]

Con base en la ecuación (10.1') se puede concluir que el trabajo dU es positivo si el ángulo α es agudo y negativo si el ángulo α es obtuso. Existen tres casos de interés especial: si el vector fuerza $\mathbf{F}$ tiene la misma dirección que el vector desplazamiento $d\mathbf{r}$, entonces el trabajo dU se reduce a $F ds$, pero si $\mathbf{F}$ tiene dirección opuesta a $d\mathbf{r}$, entonces el trabajo se obtiene como $dU = -F ds$. Por último, si $\mathbf{F}$ es perpendicular a $d\mathbf{r}$, el trabajo dU es igual a cero.

También el trabajo dU de una fuerza $\mathbf{F}$ durante un desplazamiento $d\mathbf{r}$ se puede considerar como el producto de F con la componente $ds \cos \alpha$ del desplazamiento $d\mathbf{r}$ a lo largo de $\mathbf{F}$ (figura 10.2a). Este enfoque es muy práctico cuando se desea determinar el trabajo realizado

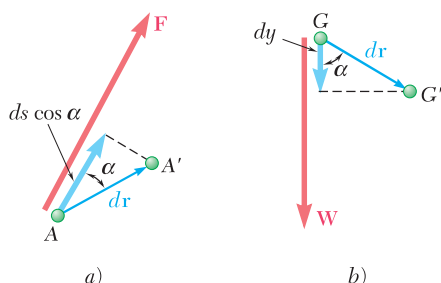


Figura 10.2

por el peso $\mathbf{W}$ de un cuerpo (figura 10.2b). En este caso, el trabajo $\mathbf{W}$ es igual al producto de W y el desplazamiento vertical dy del centro de gravedad G del cuerpo. Si el desplazamiento es hacia abajo, el trabajo realizado es positivo, pero si el desplazamiento es hacia arriba, entonces el trabajo realizado será negativo.

Hay cierto número de fuerzas que se estudian en estática y que *no realizan trabajo*: fuerzas aplicadas a puntos fijos ($ds = 0$) o que actúan en dirección perpendicular al desplazamiento ($\cos \alpha = 0$). Dentro de este tipo de fuerzas se pueden citar las fuerzas de reacción que se generan en pernos sin fricción cuando el cuerpo que se sostiene rota con respecto al perno; las fuerzas de reacción en superficies sin fricción cuando el cuerpo en contacto se mueve a lo largo de la superficie; la fuerza de reacción que genera un rodillo cuando se mueve a lo largo de un riel; el peso de un cuerpo cuando su centro de gravedad se mueve en forma horizontal, y la fuerza de fricción que una rueda genera cuando ésta gira sin deslizarse (debido a que en todo instante el punto de contacto no se mueve). Algunos ejemplos de fuerzas que *sí realizan trabajo* son el peso del cuerpo (excepto en el caso considerado anteriormente), la fuerza de fricción que actúa en un cuerpo que se desliza sobre una superficie rugosa y la mayoría de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en movimiento.

[†]El joule es la unidad de *energía* en las unidades del SI, sin importar si dicha energía está en forma mecánica (trabajo, energía potencial y energía cinética), química, eléctrica o térmica. Se debe notar que aunque $\text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$, el momento de una fuerza debe expresarse en $\text{N} \cdot \text{m}$ y no en joules, puesto que el momento de una fuerza no es una forma de energía.



Fotografía 10.1 Las fuerzas ejercidas por los cilindros hidráulicos para posicionar el elevador de canasta mostrado en la fotografía pueden determinarse de manera efectiva mediante el método del trabajo virtual; lo anterior es posible porque existe una relación simple entre los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas que actúan sobre los elementos del elevador.

En ciertos casos, la suma del trabajo realizado por varias fuerzas es cero. Por ejemplo, considérense los dos cuerpos rígidos AC y BC conectados en C mediante un *perno sin fricción* (figura 10.3a). Entre las fuerzas que actúan en AC está la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida en C por BC .

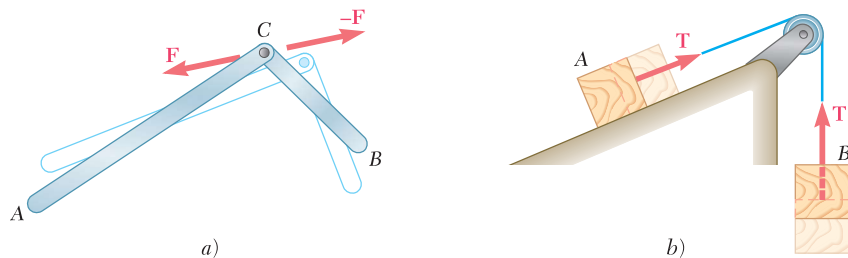


Figura 10.3

En general, el trabajo de esta fuerza no será cero, pero éste será igual en magnitud y de signo opuesto al trabajo generado por la fuerza $-\mathbf{F}$ ejercida por AC sobre BC debido a que estas fuerzas son iguales y opuestas y se aplican sobre la misma partícula. Así, cuando se considere el trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan sobre AB y BC , el trabajo realizado por las dos fuerzas internas en C se anula. Se puede obtener una conclusión análoga al considerar un sistema compuesto de dos bloques conectados mediante una *cuerda inextensible* AB (figura 10.3b). El trabajo de la fuerza de tensión $\mathbf{T}$ en A es igual en magnitud al trabajo realizado por la fuerza de tensión $\mathbf{T}'$ en B , debido a que estas dos fuerzas tienen la misma magnitud y los puntos A y B recorren la misma distancia; sin embargo, en un caso el trabajo es positivo mientras que en el otro es negativo y, de nuevo, el trabajo realizado por las fuerzas internas se cancela.

Se puede demostrar que el trabajo total de las fuerzas internas que mantienen unido a un cuerpo rígido es cero. En este caso, considere dos partículas A y B de un mismo cuerpo rígido y dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ iguales y opuestas que actúan una sobre la otra (figura 10.4). Como en

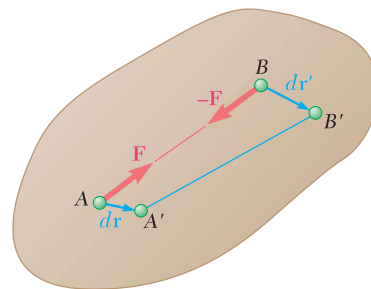


Figura 10.4

general los desplazamientos pequeños $d\mathbf{r}$ y $d\mathbf{r}'$ de las dos partículas son diferentes, las componentes de estos desplazamientos a lo largo de AB deben ser iguales; de otra manera, las partículas no permanecerían a la misma distancia una con respecto a la otra, por tanto, el cuerpo no sería rígido. En este sentido, el trabajo de $\mathbf{F}$ es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo de $-\mathbf{F}$, y su suma es cero.

Al calcular el trabajo de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido es conveniente considerar el trabajo de un par sin considerar por separado el trabajo de cada una de las dos fuerzas que lo

forman. Considere las dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ que forman un par de momento $\mathbf{M}$, las cuales actúan sobre un cuerpo rígido (figura 10.5). Cualquier desplazamiento pequeño del cuerpo rígido que lleve a A y B a A' y B'' , respectivamente, puede dividirse en dos partes, una en la cual los puntos A y B sufren desplazamientos iguales $d\mathbf{r}_1$ y la otra en la cual A' permanece fijo mientras que B' se mueve a B'' mediante un desplazamiento $d\mathbf{r}_2$ de magnitud $ds_2 = r d\theta$. Durante la primera parte del movimiento, el trabajo de $\mathbf{F}$ es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo de $-\mathbf{F}$ y por tanto su suma es cero. Sin embargo, en la segunda parte del movimiento sólo la fuerza $\mathbf{F}$ hace trabajo y éste es igual a $dU = F ds_2 = Fr d\theta$. Pero el producto Fr es igual a la magnitud M del momento del par. De esta manera, el trabajo de un par de momento $\mathbf{M}$ que actúa sobre un cuerpo rígido es:

$$dU = M d\theta \quad (10.2)$$

donde $d\theta$ representa el ángulo pequeño que rota el cuerpo, expresado en radianes. Se debe enfatizar nuevamente que el trabajo debe estar expresado en unidades que se obtienen al multiplicar unidades de fuerza por unidades de longitud.

*10.3. PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

Considere una partícula sobre la que actúan varias fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ (figura 10.6). Suponga que la partícula realiza un desplazamiento pequeño desde A hasta A' , el cual en ocasiones es posible, pero no necesariamente sucede. Las fuerzas pueden estar balanceadas y la partícula en reposo o la partícula puede moverse bajo la acción de las fuerzas dadas en una dirección diferente a la de AA' . A este desplazamiento, denotado por $\delta\mathbf{r}$, se le llama *desplazamiento virtual*, puesto que en realidad no sucede. El símbolo $\delta\mathbf{r}$ representa una diferencial de primer orden y se le usa para distinguir el desplazamiento virtual del desplazamiento $d\mathbf{r}$ que podría suceder si la partícula estuviera en movimiento. Como se verá más adelante, los desplazamientos virtuales pueden usarse para determinar si se satisfacen las condiciones de equilibrio de una partícula dada.

Al trabajo realizado por las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ durante el desplazamiento virtual $\delta\mathbf{r}$ se le llama *trabajo virtual*. El trabajo virtual de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula de la figura 10.6 es

$$\begin{aligned} \delta U &= \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \dots + \mathbf{F}_n \cdot \delta\mathbf{r} \\ &= (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n) \cdot \delta\mathbf{r} \end{aligned}$$

o

$$\delta U = \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} \quad (10.3)$$

donde con $\mathbf{R}$ se representa la resultante de las fuerzas dadas. Por tanto, el trabajo virtual total realizado por las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ es igual al trabajo virtual realizado por su resultante $\mathbf{R}$.

El principio del trabajo virtual para una partícula establece que si una partícula está en equilibrio, el trabajo virtual total de las fuerzas que actúan sobre la partícula es cero para cualquier desplazamiento virtual de la partícula. Así, esta condición necesaria establece que si la partícula está en equilibrio, la resultante $\mathbf{R}$ de las fuerzas es cero y, por tanto, se concluye con base en la ecuación (10.3) que el trabajo virtual δU es cero. La condición es suficiente para afirmar que si el trabajo virtual δU es cero para cualquier desplazamiento virtual, el producto escalar $\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r}$ es cero para cualquier $\delta\mathbf{r}$, y que la resultante $\mathbf{R}$ debe ser cero.

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

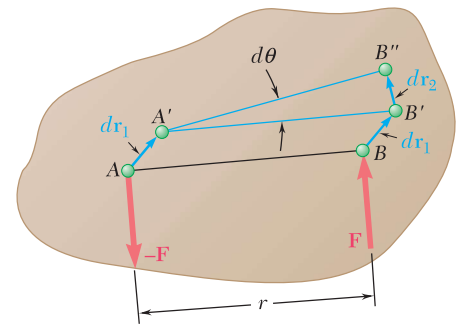


Figura 10.5

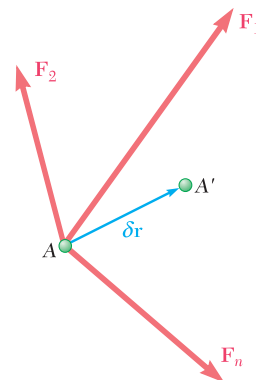


Figura 10.6

En el caso de un cuerpo rígido, el principio del trabajo virtual establece que *si el cuerpo rígido está en equilibrio, el trabajo virtual total de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo rígido es cero para cualquier desplazamiento virtual del cuerpo*. Esta condición necesaria establece que si el cuerpo está en equilibrio, todas las partículas que lo forman están en equilibrio y el trabajo virtual total de las fuerzas que actúan sobre todas las partículas debe ser cero. Pero en la sección anterior se vio que el trabajo total de las fuerzas internas es cero, por tanto, el trabajo total de las fuerzas externas también debe ser cero. Puede demostrarse que esta condición también es suficiente.

El principio del trabajo virtual se puede extender al caso de un *sistema de cuerpos rígidos unidos*. Si el sistema permanece unido durante un desplazamiento virtual, debe *considerarse sólo el trabajo de las fuerzas externas al sistema* puesto que el trabajo de las fuerzas internas entre las diferentes uniones del sistema es cero.

*10.4. APLICACIONES DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

El principio del trabajo virtual es particularmente efectivo cuando se aplica a la solución de problemas que involucran máquinas o mecanismos compuestos de varios cuerpos rígidos conectados entre sí. Por

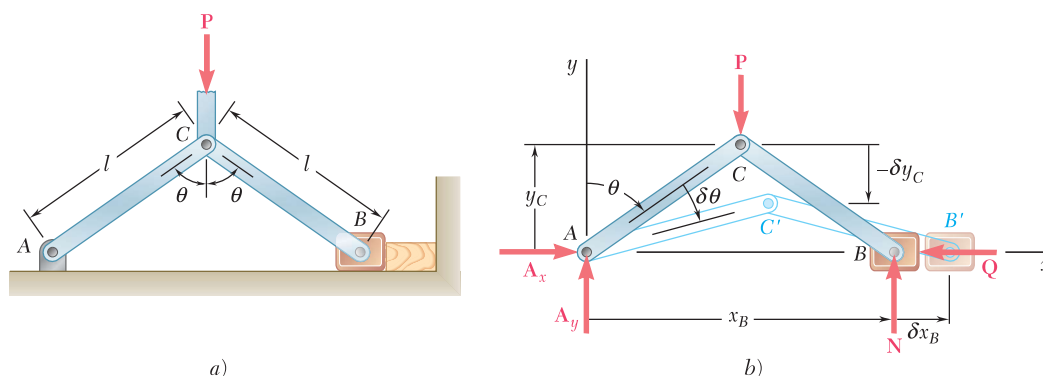


Figura 10.7

ejemplo, la prensa de banco ACB mostrada en la figura 10.7a, la cual se usa para comprimir un bloque de madera. Se desea determinar la fuerza ejercida por la prensa sobre el bloque cuando se aplica en C una fuerza $\mathbf{P}$ suponiendo que no hay fricción. Representando con $\mathbf{Q}$ la reacción que ejerce el bloque sobre la prensa, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la misma y se considera el desplazamiento virtual que se obtiene al incrementar en forma positiva el ángulo θ en $\delta\theta$ (figura 10.7b). Al seleccionar un sistema de ejes coordenados con origen en A, se nota que x_B se incrementa mientras que y_C disminuye. En la figura se muestra un incremento positivo δx_B y un incremento negativo $-\delta y_C$. Las reacciones A_x , A_y y $\mathbf{N}$ no realizan trabajo durante el desplazamiento virtual considerado y sólo se debe calcular el trabajo realizado por $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$. Como $\mathbf{Q}$ y δx_B tienen sentidos opuestos, el trabajo virtual de $\mathbf{Q}$ es $\delta U_Q = -Q \delta x_B$. Como $\mathbf{P}$ y el incremento mostrado en la figura ($-\delta y_C$) tienen el mismo sentido, el trabajo virtual de $\mathbf{P}$ es $\delta U_P = +P(-\delta y_C) = -P \delta y_C$. El signo negativo en la relación anterior pudo haberse previsto al observar que las fuerzas $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{P}$ tienen, res-

pectivamente, direcciones opuestas a los ejes positivos x y y . Si se expresa las coordenadas x_B y y_C en términos del ángulo θ y diferenciando, se obtiene

$$\begin{aligned} x_B &= 2l \sin \theta & y_C &= l \cos \theta \\ \delta x_B &= 2l \cos \theta \delta \theta & \delta y_C &= -l \sin \theta \delta \theta \end{aligned} \quad (10.4)$$

Por tanto, el trabajo virtual realizado por las fuerzas $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{P}$ es

$$\begin{aligned} \delta U &= \delta U_Q + \delta U_P = -Q \delta x_B - P \delta y_C \\ &= -2Ql \cos \theta \delta \theta + Pl \sin \theta \delta \theta \end{aligned}$$

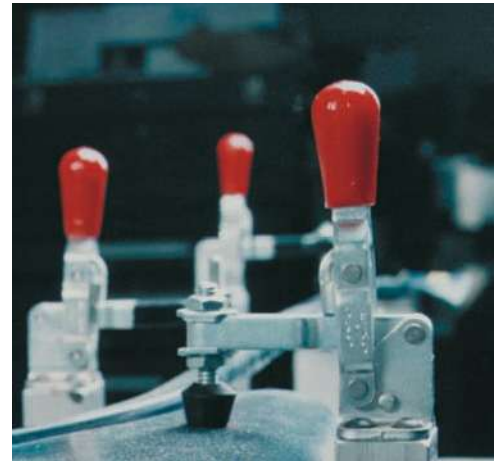
Estableciendo $\delta U = 0$ se obtiene

$$2Ql \cos \theta \delta \theta = Pl \sin \theta \delta \theta \quad (10.5)$$

$$Q = \frac{1}{2}P \tan \theta \quad (10.6)$$

En este problema es clara la superioridad del método del trabajo virtual sobre las ecuaciones de equilibrio convencionales: al utilizar el método del trabajo virtual se pudieron eliminar todas las reacciones desconocidas mientras que al plantear la ecuación de equilibrio $\Sigma M_A = 0$ sólo se hubieran podido eliminar dos de éstas. Esta propiedad del método del trabajo virtual se puede utilizar para resolver problemas relacionados con máquinas y mecanismos. *Si el desplazamiento virtual considerado es consistente con las restricciones impuestas por los apoyos y uniones, todas las reacciones y las fuerzas internas se eliminan y sólo debe considerarse el trabajo de las cargas, las fuerzas aplicadas y las fuerzas de fricción.*

También el método del trabajo virtual puede utilizarse para resolver problemas que involucren estructuras completamente restringidas, aunque en realidad nunca se presentan los desplazamientos virtuales considerados. Por ejemplo, considere el armazón ACB mostrado en la figura 10.8a. Si se mantiene fijo el punto A mientras que al punto B se le aplica un desplazamiento virtual horizontal (figura 10.8b), sólo es necesario considerar el trabajo realizado por $\mathbf{P}$ y $\mathbf{B}_x$. Entonces, se puede determinar el valor de la componente de reacción $\mathbf{B}_x$ de la misma



Fotografía 10.2 La fuerza de agarre de la abrazadera de seguro que se presenta en la fotografía puede ser expresada como una función de la fuerza aplicada a la manivela, estableciendo primero las relaciones geométricas entre los elementos de la abrazadera, para después aplicar el método del trabajo virtual.

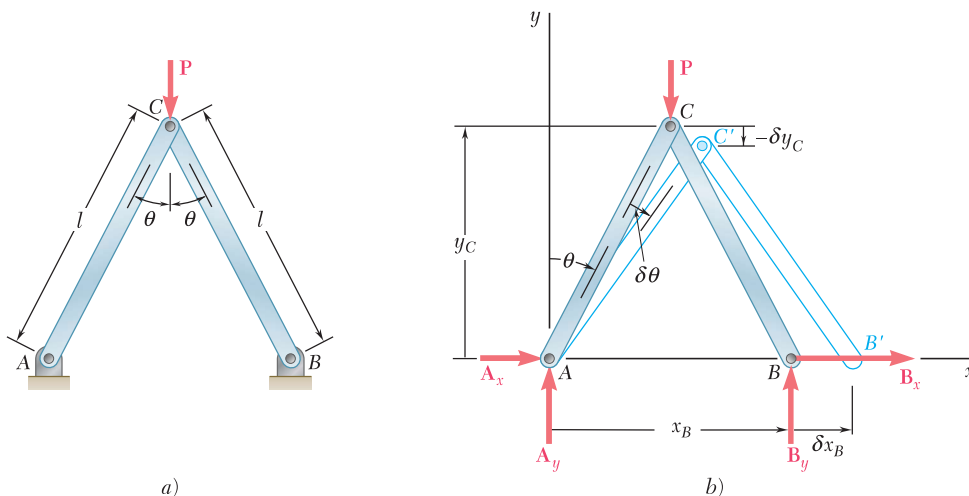


Figura 10.8

forma en que se calculó la fuerza $\mathbf{Q}$ del ejemplo anterior (figura 10.7b); por tanto, se obtiene

$$B_x = -\frac{1}{2}P \tan \theta$$

En forma análoga se puede determinar la componente de la reacción $\mathbf{A}_x$ al mantener fijo el punto B y aplicar un desplazamiento virtual horizontal al punto A . Las restantes componentes $\mathbf{A}_y$ y $\mathbf{B}_y$ se pueden calcular rotando el armazón ACB como si fuera un cuerpo rígido, respectivamente, con relación a B y A .

El método de trabajo virtual también se puede emplear para determinar la configuración de un sistema en equilibrio sujeto a la acción de varias fuerzas dadas. Por ejemplo, puede obtenerse el valor del ángulo θ para el cual el mecanismo de la figura 10.7 está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ resolviendo la ecuación (10.6) para $\tan \theta$.

Es necesario señalar que lo atractivo del método del trabajo virtual depende en gran medida de la existencia de relaciones geométricas simples entre los diferentes desplazamientos virtuales involucrados en la solución de cierto problema dado. Cuando no es posible obtener dichas relaciones geométricas simples es necesario recurrir al método convencional de solución expuesto en el capítulo 6.

*10.5. MÁQUINAS REALES. EFICIENCIA MECÁNICA

Al hacer el análisis de la prensa de banco de la sección anterior, se supuso que no había fuerzas de fricción. Así, el trabajo virtual consistía sólo en el trabajo de la fuerza aplicada $\mathbf{P}$ y de la fuerza de reacción $\mathbf{Q}$. Note que el trabajo de la reacción $\mathbf{Q}$ es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo realizado por la fuerza ejercida por la prensa de banco sobre el bloque. Por tanto, la ecuación (10.5) expresa que el *trabajo de salida* $2Ql \cos \theta \delta \theta$ es igual al *trabajo de entrada* $Pl \sin \theta \delta \theta$. Una máquina en la cual el trabajo de entrada es igual al trabajo de salida se le conoce como máquina “ideal”. Pero en una máquina “real” las fuerzas de fricción siempre realizan trabajo, por lo que el trabajo de salida será menor que el trabajo de entrada.

Por ejemplo, considere la prensa de banco de la figura 10.7a y suponga que existe una fuerza de fricción $\mathbf{F}$ entre el bloque deslizable B y el plano horizontal (figura 10.9). Con el uso de los métodos convencionales de la estática y al sumar los momentos con respecto a A , se encuentra que $N = P/2$. Si se representa con μ el coeficiente de fric-

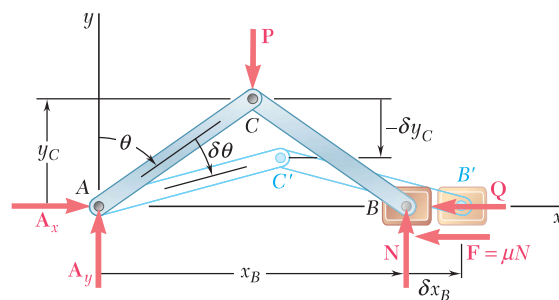


Figura 10.9

ción entre el bloque B y el plano horizontal, se tiene que $F = \mu N = \mu P/2$. Recordando las fórmulas (10.4), es posible determinar el trabajo virtual total de las fuerzas $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{F}$ realizado durante el desplazamiento virtual mostrado en la figura 10.9, esto es:

$$\begin{aligned}\delta U &= -Q \delta x_B - P \delta y_C - F \delta x_B \\ &= -2Ql \cos \theta \delta \theta + Pl \sin \theta \delta \theta - \mu Pl \cos \theta \delta \theta\end{aligned}$$

Estableciendo $\delta U = 0$, se obtiene

$$2Ql \cos \theta \delta \theta = Pl \sin \theta \delta \theta - \mu Pl \cos \theta \delta \theta \quad (10.7)$$

la cual expresa que el trabajo de salida es igual al trabajo de entrada menos el trabajo de la fuerza de fricción. Resolviendo para Q se tiene

$$Q = \frac{1}{2}P(\tan \theta - \mu) \quad (10.8)$$

Note que si $\tan \theta = \mu$, entonces $Q = 0$; esto sucede cuando θ es igual al ángulo de fricción ϕ . Por otra parte, si $\theta < \phi$ entonces $Q < 0$. Por tanto, la prensa de banco puede usarse sólo para valores de θ mayores que el ángulo de fricción.

La *eficiencia mecánica* de una máquina se define como la relación

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} \quad (10.9)$$

Es claro que la eficiencia mecánica de una máquina ideal es $\eta = 1$, debido a que el trabajo de entrada es igual al trabajo de salida. Pero la eficiencia mecánica de una máquina real siempre será menor que 1.

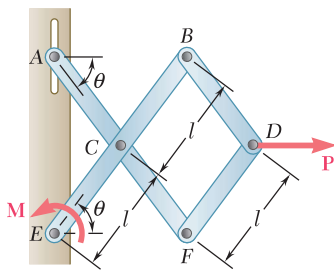
En el caso de la prensa de banco que se acaba de estudiar, se escribe

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} = \frac{2Ql \cos \theta \delta \theta}{Pl \sin \theta \delta \theta}$$

Al sustituir el valor de Q de la ecuación (10.8), se obtiene

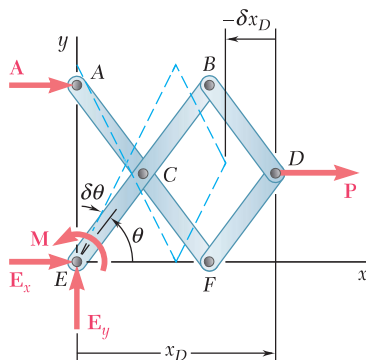
$$\eta = \frac{P(\tan \theta - \mu)l \cos \theta \delta \theta}{Pl \sin \theta \delta \theta} = 1 - \mu \cot \theta \quad (10.10)$$

Se puede comprobar que en ausencia de las fuerzas de fricción, $\mu = 0$ y $\eta = 1$. En general, para valores de μ diferentes de cero, la eficiencia η es cero cuando $\mu \cot \theta = 1$, esto es, cuando $\tan \theta = \mu$, o $\theta = \tan^{-1} \mu = \phi$. De nuevo se comprueba que la prensa de banco puede usarse sólo para valores de θ mayores que el ángulo de fricción ϕ .



PROBLEMA RESUELTO 10.1

Con el método de trabajo virtual, determine la magnitud del par **M** requerido para mantener en equilibrio el mecanismo mostrado en la figura.



SOLUCIÓN

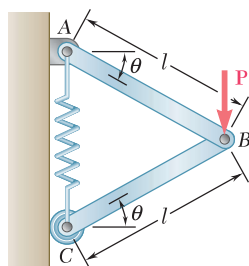
Al seleccionar un sistema de ejes coordenados con origen en **E**, se escribe

$$x_D = 3l \cos \theta \quad \delta x_D = -3l \sin \theta \delta \theta$$

Principio del trabajo virtual. Como las reacciones **A**, **E_x** y **E_y** no realizan trabajo durante el desplazamiento virtual, el trabajo virtual total realizado por **M** y **P** debe ser cero. Note que tanto **P** como **M** actúan, respectivamente, en la dirección positiva de x y θ , por lo que se puede escribir

$$\delta U = 0: \quad \begin{aligned} +M \delta \theta + P \delta x_D &= 0 \\ +M \delta \theta + P(-3l \sin \theta \delta \theta) &= 0 \end{aligned}$$

$$M = 3Pl \sin \theta \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 10.2

Para el mecanismo mostrado en la figura, determine las expresiones para θ y para la tensión en el resorte que corresponden a la posición de equilibrio. El resorte de constante k tiene una longitud sin estirar h . Por esto ignore el peso del mecanismo.

SOLUCIÓN

Con el sistema de coordenadas mostrado en la figura se tiene

$$\begin{aligned} y_B &= l \sin \theta & y_C &= 2l \sin \theta \\ \delta y_B &= l \cos \theta \delta \theta & \delta y_C &= 2l \cos \theta \delta \theta \end{aligned}$$

La elongación del resorte es

$$s = y_C - h = 2l \sin \theta - h$$

La magnitud de la fuerza ejercida en **C** por el resorte es

$$F = ks = k(2l \sin \theta - h) \quad (1)$$

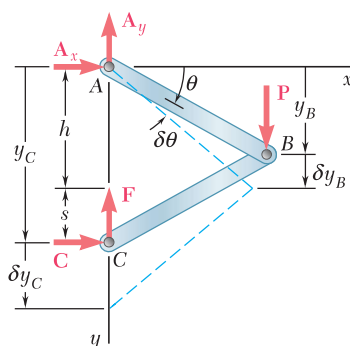
Principio del trabajo virtual. Como las reacciones **A_x**, **A_y** y **C** no realizan trabajo, el trabajo virtual total realizado por **P** y **F** debe ser cero.

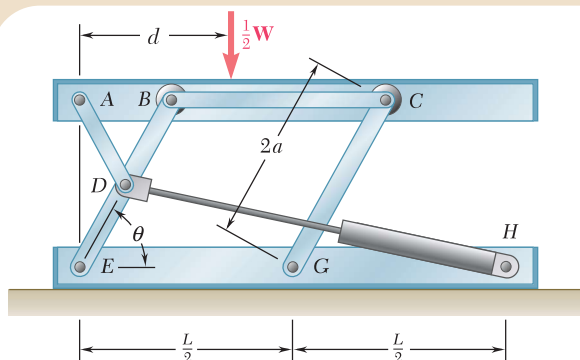
$$\delta U = 0: \quad \begin{aligned} P \delta y_B - F \delta y_C &= 0 \\ P(l \cos \theta \delta \theta) - k(2l \sin \theta - h)(2l \cos \theta \delta \theta) &= 0 \end{aligned}$$

$$\sin \theta = \frac{P + 2kh}{4kl} \quad \blacktriangleleft$$

Si se sustituye esta expresión en (1), se tiene

$$F = \frac{1}{2}P \quad \blacktriangleleft$$





PROBLEMA RESUELTO 10.3

Una mesa de elevación hidráulica se utiliza para levantar una caja de 1 000 kg. La mesa consiste de una plataforma y de dos mecanismos idénticos en los cuales los cilindros hidráulicos ejercen fuerzas iguales (en la figura se muestran sólo un mecanismo y un cilindro hidráulico). Los elementos EDB y CG miden $2a$ de longitud cada uno y el elemento AD se une mediante un perno al punto medio de EDB . Si la caja se coloca sobre la caja de manera que la mitad de su peso es soportado por el sistema mostrado en la figura, determine la fuerza ejercida por cada cilindro al levantar la caja para los valores de $\theta = 60^\circ$, $a = 0.70$ m y $L = 3.20$ m. Este mecanismo se estudió previamente en el problema resuelto 6.7.

SOLUCIÓN

La máquina considerada consiste de la plataforma y del mecanismo en el que se ejerce una fuerza de entrada F_{DH} por medio del cilindro y una fuerza de salida igual y opuesta a $\frac{1}{2}W$.

Principio del trabajo virtual. Observe primero que las reacciones en E y G no realizan trabajo. Al representar con y la elevación de la plataforma sobre la base y con s la longitud DH del sistema cilindro-pistón, se escribe

$$\delta U = 0: \quad -\frac{1}{2}W \delta y + F_{DH} \delta s = 0 \quad (1)$$

El desplazamiento vertical δy de la plataforma se puede expresar en términos del desplazamiento angular $\delta\theta$ del elemento EDB de la siguiente forma:

$$y = (EB) \sin \theta = 2a \sin \theta \\ \delta y = 2a \cos \theta \delta\theta$$

Para expresar δs de una forma análoga en términos de $\delta\theta$, se aplica primero la ley de cosenos,

$$s^2 = a^2 + L^2 - 2aL \cos \theta$$

Diferenciando,

$$2s \delta s = -2aL(-\sin \theta) \delta\theta \\ \delta s = \frac{aL \sin \theta}{s} \delta\theta$$

Sustituyendo los valores de δy y δs en (1), se escribe

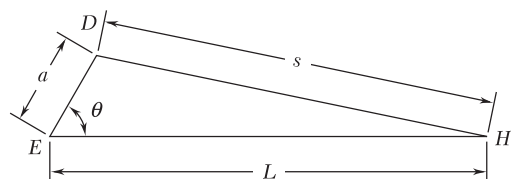
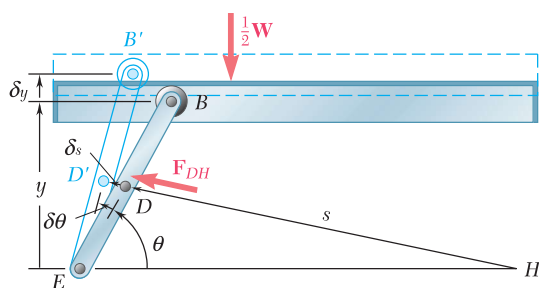
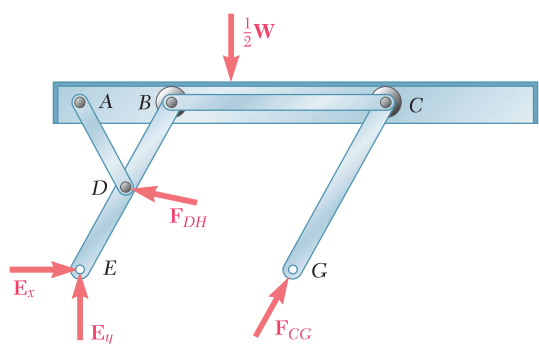
$$\left(-\frac{1}{2}W\right)2a \cos \theta \delta\theta + F_{DH} \frac{aL \sin \theta}{s} \delta\theta = 0 \\ F_{DH} = W \frac{s}{L} \cot \theta$$

Con los datos numéricos dados, se tiene

$$W = mg = (1\,000 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 9\,810 \text{ N} = 9.81 \text{ kN} \\ s^2 = a^2 + L^2 - 2aL \cos \theta \\ = (0.70)^2 + (3.20)^2 - 2(0.70)(3.20) \cos 60^\circ = 8.49 \\ s = 2.91 \text{ m}$$

$$F_{DH} = W \frac{s}{L} \cot \theta = (9.81 \text{ kN}) \frac{2.91 \text{ m}}{3.20 \text{ m}} \cot 60^\circ$$

$$F_{DH} = 5.15 \text{ kN} \quad \leftarrow$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se aprendió a utilizar el *método del trabajo virtual*, el cual representa una alternativa diferente para resolver problemas relacionados con el equilibrio de los cuerpos rígidos.

El trabajo realizado por una fuerza durante un desplazamiento de su punto de aplicación o por un par durante una rotación se puede determinar utilizando, respectivamente, las ecuaciones (10.1) y (10.2):

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (10.1)$$

$$dU = M d\theta \quad (10.2)$$

Principio del trabajo virtual. En su forma más general y más útil, este principio se puede enunciar de la siguiente manera: *si un sistema de cuerpos rígidos unidos está en equilibrio, el trabajo virtual total de las fuerzas externas aplicadas al sistema es siempre cero para cualquier desplazamiento virtual que experimente el sistema.*

Cuando se quiera aplicar el principio del trabajo virtual, es importante tener presente lo siguiente:

1. **Desplazamiento virtual.** Una máquina o mecanismo en equilibrio no tiene ninguna tendencia a moverse. Sin embargo, *se puede causar o imaginar un desplazamiento pequeño*. Como en realidad dicho desplazamiento no ocurre, a éste se le conoce como *desplazamiento virtual*.
2. **Trabajo virtual.** Al trabajo realizado por una fuerza o un par durante un desplazamiento virtual se le conoce como *trabajo virtual*.
3. **Se deben considerar sólo las fuerzas que realizan trabajo** durante el desplazamiento virtual.
4. **Las fuerzas que no realizan trabajo** durante un desplazamiento virtual que es consistente con las restricciones impuestas sobre el sistema son:
 - a) Las reacciones en los apoyos
 - b) Las fuerzas internas en las uniones
 - c) Las fuerzas ejercidas por cables y cuerdas inextensibles

Ninguna de estas fuerzas debe tomarse en cuenta al utilizar el método del trabajo virtual.

5. **Se debe estar seguro de que los diversos desplazamientos virtuales** relacionados con los cálculos estén expresados en términos de un *solo desplazamiento virtual*. Esto se realizó en cada uno de los tres problemas resueltos de esta sección, donde todos los desplazamientos virtuales fueron expresados en términos de $\delta\theta$.

6. **Se debe recordar que el método del trabajo virtual sólo es efectivo en aquellos casos** en donde la geometría de los sistemas permite relacionar de una forma simple los desplazamientos involucrados en el análisis.

Problemas

10.1 Determine la fuerza vertical $\mathbf{P}$ que debe aplicarse en C para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura.

10.2 Determine la fuerza horizontal $\mathbf{P}$ que debe aplicarse en A para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura.

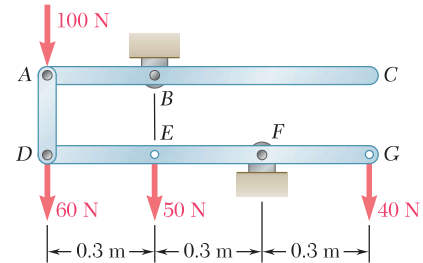


Figura P10.1 y P10.3

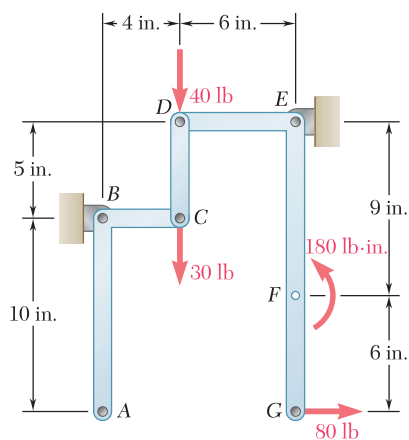


Figura P10.2 y P10.4

10.3 y 10.4 Determine el par $\mathbf{M}$ que debe aplicarse en el elemento ABC para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en las figuras.

10.5 Si se sabe que la fuerza de fricción máxima ejercida por la botella mostrada en la figura sobre el corcho es de 60 lb, determine *a*) la fuerza $\mathbf{P}$ que se debe aplicar al sacacorchos para abrir la botella y *b*) la fuerza máxima ejercida por la base del sacacorchos sobre la parte superior de la botella.

10.6 El mecanismo de dos barras mostrado en la figura se sostiene mediante un soporte de perno en B y por medio de un collarín en D , el cual se desliza libremente sobre una barra vertical. Determine la fuerza $\mathbf{P}$ requerida para mantener el equilibrio del mecanismo.

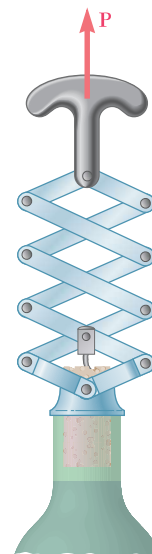


Figura P10.5

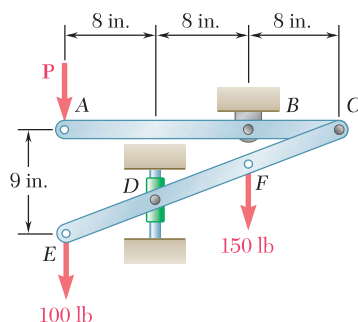


Figura P10.6

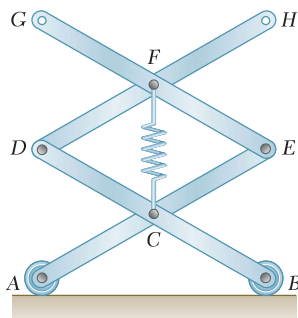


Figura P10.7 y P10.8

10.7 Un resorte de constante igual a 15 kN/m se conecta a los puntos C y F del mecanismo mostrado en la figura. Si se desprecia el peso del resorte y del mecanismo, determine la fuerza en el resorte y el desplazamiento vertical del punto G cuando una fuerza vertical de 120 N , dirigida hacia abajo, se aplica *a)* en el punto C y *b)* en los puntos C y H .

10.8 Un resorte de constante igual a 15 kN/m se conecta a los puntos C y F del mecanismo mostrado en la figura. Si se desprecia el peso del resorte y del mecanismo, determine la fuerza en el resorte y el desplazamiento vertical del punto G cuando una fuerza vertical de 120 N , dirigida hacia abajo, se aplica *a)* en el punto E y *b)* en los puntos E y F .

10.9 Si se sabe que la línea de acción de la fuerza Q pasa por el punto C del mecanismo mostrado en la figura, deduzca una expresión para determinar la magnitud de la fuerza Q requerida para mantener el equilibrio.

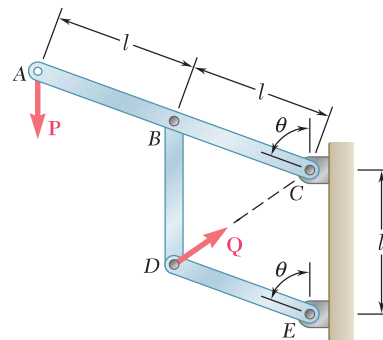


Figura P10.9

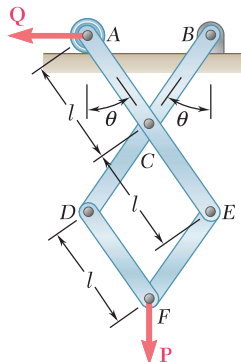


Figura P10.11

10.10 Retome el problema 10.9, y ahora suponga que la fuerza P aplicada en el punto A actúa horizontalmente hacia la izquierda.

10.11 El mecanismo mostrado en la figura está sometido a la acción de la fuerza P ; deduzca una expresión para determinar la magnitud de la fuerza Q requerida para mantener el equilibrio.

10.12 y 10.13 La barra delgada AB está unida a un collarín A y descansa sobre una rueda pequeña en C . Si se desprecia el radio de la rueda y el efecto de la fricción, deduzca una expresión para determinar la magnitud de la fuerza Q requerida para mantener el equilibrio de la barra.

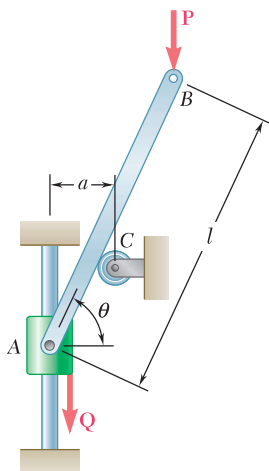


Figura P10.12

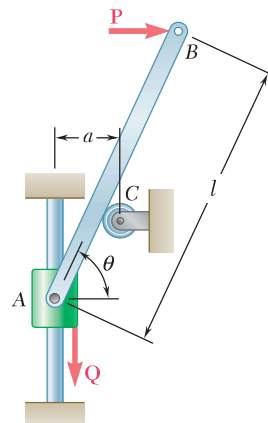


Figura P10.13

10.14 Obtenga una expresión para determinar la magnitud de la fuerza Q requerida para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura.

10.15 Una barra uniforme AB de longitud l y peso W está suspendida de dos cuerdas AC y BC con igual longitud. Deduzca una expresión para determinar la magnitud del par M requerido para mantener el equilibrio de la barra en la posición mostrada.

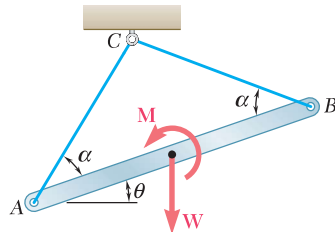


Figura P10.15

10.16 y 10.17 Obtenga una expresión para determinar la magnitud del par M requerido para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en las figuras.

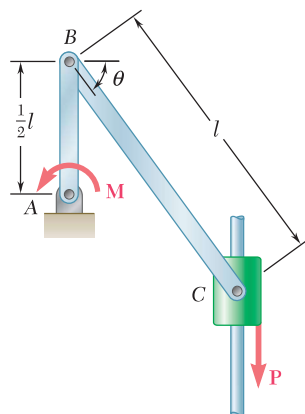


Figura P10.16

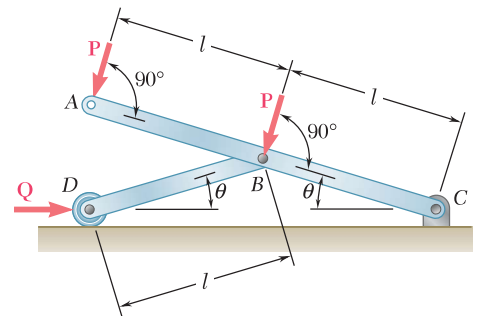


Figura P10.14

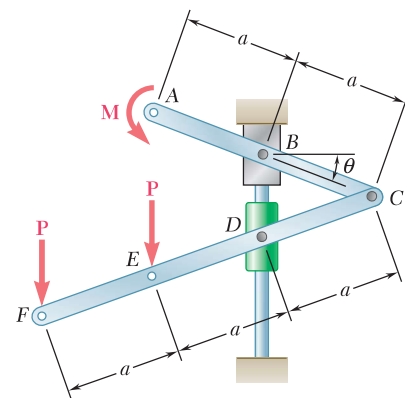


Figura P10.17

10.18 El perno en C está unido al elemento BCD y puede deslizarse a lo largo de la ranura de la placa fija mostrada en la figura. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, deduzca una expresión para determinar la magnitud del par M requerido para mantener el equilibrio cuando la fuerza P , que actúa en D , está orientada $a)$ en la forma que se muestra en la figura, $b)$ verticalmente hacia abajo y $c)$ horizontalmente hacia la derecha.

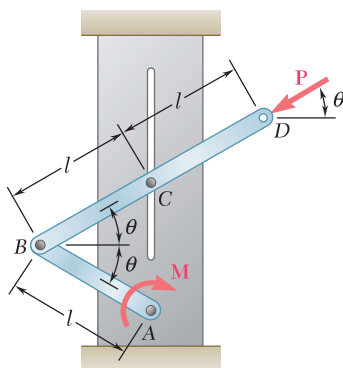


Figura P10.18

10.19 Una fuerza $\mathbf{P}$ de 4 kN se aplica sobre el pistón del sistema motriz mostrado en la figura. Si se sabe que $AB = 50$ mm y que $BC = 200$ mm, determine el par $\mathbf{M}$ requerido para mantener el equilibrio del sistema cuando a) $\theta = 30^\circ$ y b) $\theta = 150^\circ$.

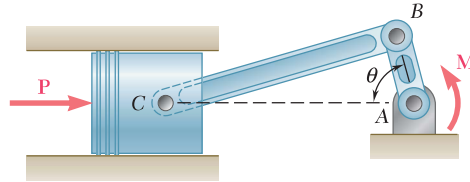


Figura P10.19 y P10.20

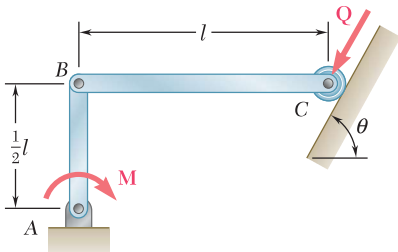


Figura P10.21 y P10.22

10.20 Un par $\mathbf{M}$ de $100 \text{ N} \cdot \text{m}$ de magnitud se aplica sobre la manivela del sistema motriz mostrado en la figura. Si se sabe que $AB = 50$ mm y que $BC = 200$ mm, determine la fuerza $\mathbf{P}$ requerida para mantener el equilibrio del sistema cuando a) $\theta = 60^\circ$ y b) $\theta = 120^\circ$.

10.21 Para el mecanismo mostrado en la figura, determine el par $\mathbf{M}$ requerido para mantener el equilibrio cuando $l = 1.8$ ft, $Q = 40$ lb, y $\theta = 65^\circ$.

10.22 Para el mecanismo mostrado en la figura, determine la fuerza $\mathbf{Q}$ requerida para mantener el equilibrio cuando $l = 18$ in., $M = 600 \text{ lb} \cdot \text{in.}$, y $\theta = 70^\circ$.

10.23 Determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio del mecanismo del problema 10.11 cuando $P = 45$ lb y $Q = 160$ lb.

10.24 Determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio del mecanismo del problema 10.9 cuando $P = 80$ N y $Q = 100$ N.

10.25 La barra AB está unida en A a un bloque que puede deslizarse libremente por la ranura vertical que se muestra en la figura. Si se desprecia el efecto de la fricción y los pesos de las barras, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio.

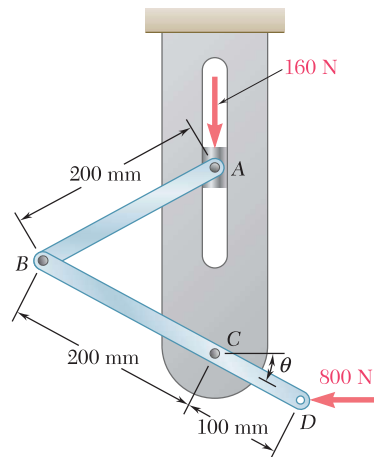


Figura P10.25

10.26 Retome el problema 10.25, y ahora suponga que la fuerza de 800 N se reemplaza por un par de $24 \text{ N} \cdot \text{m}$ en el sentido de las manecillas del reloj aplicado en D .

10.27 Determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio de la barra del problema 10.12 cuando $l = 30 \text{ in.}$, $a = 5 \text{ in.}$, $P = 25 \text{ lb}$ y $Q = 40 \text{ lb}$.

10.28 Determine los valores de θ que corresponden a la posición de equilibrio de la barra del problema 10.13 cuando $l = 600 \text{ mm}$, $a = 100 \text{ mm}$, $P = 50 \text{ N}$ y $Q = 90 \text{ N}$.

10.29 En la figura se muestran dos barras AC y CE que se conectan entre sí mediante un perno en C y por medio del resorte AE . La constante del resorte es k y éste se encuentra sin estirar cuando $\theta = 30^\circ$. Para la carga mostrada, deduzca una ecuación en función de P , θ , l y k que se cumpla cuando el sistema esté en equilibrio.

10.30 En la figura se muestran dos barras AC y CE que se conectan entre sí mediante un perno en C y por medio del resorte AE . La constante del resorte es de 1.5 lb/in. y éste se encuentra sin estirar cuando $\theta = 30^\circ$. Si se sabe que $l = 10 \text{ in.}$, y sin tomar en cuenta el peso de las barras, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $P = 40 \text{ lb}$.

10.31 Retome el problema 10.30, y ahora suponga que la fuerza P se traslada a C y actúa verticalmente hacia abajo.

10.32 La barra ABC está unida a los bloques A y B que pueden moverse libremente por las guías mostradas en la figura. La constante del resorte unido en A es $k = 3 \text{ kN/m}$ y el resorte está sin estirar cuando la barra se encuentra en posición vertical. Para la carga mostrada, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio.

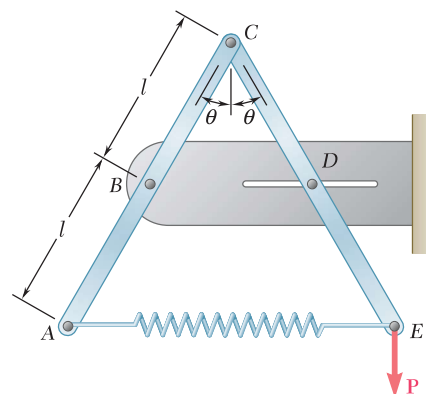


Figura P10.29 y P10.30

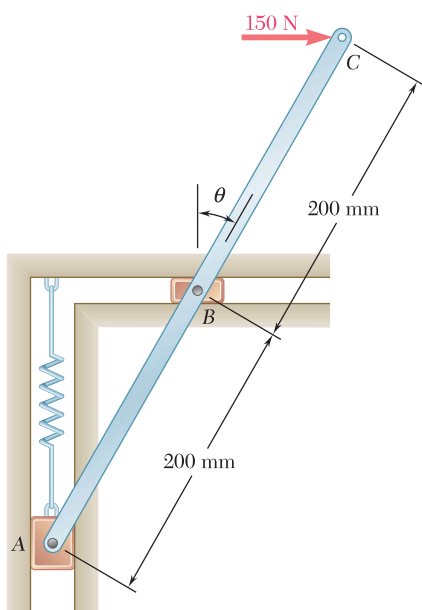


Figura P10.32

10.33 Una carga vertical W con 600 N de magnitud se aplica en el punto B del mecanismo mostrado en la figura. El resorte, con una constante de $k = 2.5 \text{ kN/m}$, se encuentra sin estirar cuando AB y BC están en posición horizontal. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo y puesto que $l = 300 \text{ mm}$, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio.

10.34 Una carga vertical W se aplica en el punto B del mecanismo mostrado en la figura. Cuando AB y BC están en posición horizontal el resorte, con una constante k , se encuentra sin estirar. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo, obtenga una ecuación en función de θ , W , l y k que se cumpla cuando el mecanismo esté en equilibrio.

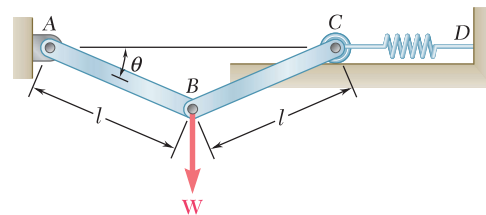


Figura P10.33 y P10.34

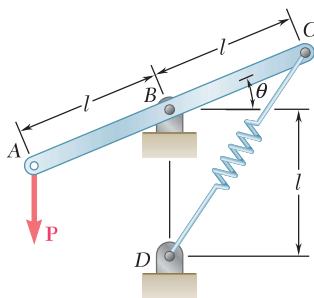


Figura P10.35 y P10.36

10.35 y 10.36 Si la constante del resorte CD mostrado en la figura es k y éste se encuentra sin estirar cuando la barra ABC está en posición horizontal, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio para los datos indicados.

10.35 $P = 300 \text{ N}$, $l = 400 \text{ mm}$, $k = 5 \text{ kN/m}$.

10.36 $P = 75 \text{ lb}$, $l = 15 \text{ in.}$, $k = 20 \text{ lb/in.}$

10.37 Una carga W con magnitud de 72 lb se aplica en el punto C del mecanismo mostrado en la figura. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo, determine el valor de θ correspondiente al equilibrio. La constante del resorte es $k = 20 \text{ lb/in.}$ y éste se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$.

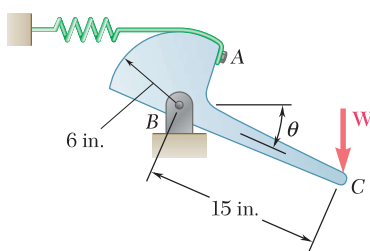


Figura P10.37

10.38 Una fuerza P con magnitud de 240 N se aplica al extremo E del cable CDE , el cual pasa bajo la polea D y se encuentra unido al mecanismo en C . Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo ni el radio de la polea, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio. La constante del resorte es $k = 4 \text{ kN/m}$ y el resorte está sin estirar cuando $\theta = 90^\circ$.

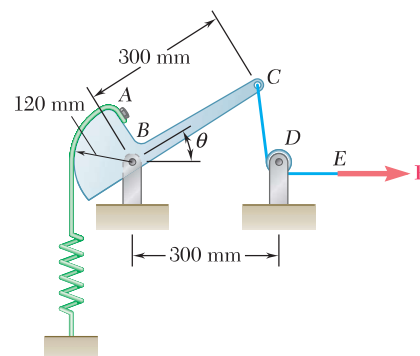


Figura P10.38

10.39 La palanca AB mostrada en la figura se une al eje horizontal BC que pasa a través del cojinete y está soldado sobre el apoyo fijo en C . La constante de torsión del resorte del eje BC es K ; esto es, se requiere de un par de magnitud K para rotar 1 radián al extremo B del eje. Si se sabe que el eje no está sometido a torsión cuando la palanca AB está en posición horizontal, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio si $P = 100 \text{ N}$, $l = 250 \text{ mm}$ y $K = 12.5 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$.

10.40 Retome el problema 10.39, y ahora suponga que $P = 350 \text{ N}$, $l = 250 \text{ mm}$ y $K = 12.5 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$. Obtenga respuestas en cada uno de los cuadrantes siguientes: $0 < \theta < 90^\circ$, $270^\circ < \theta < 360^\circ$ y $360^\circ < \theta < 450^\circ$.

10.41 La posición del pescante ABC se controla mediante un cilindro hidráulico BD . Para la carga mostrada, determine la fuerza que ejerce el cilindro sobre el pasador B cuando $\theta = 65^\circ$.

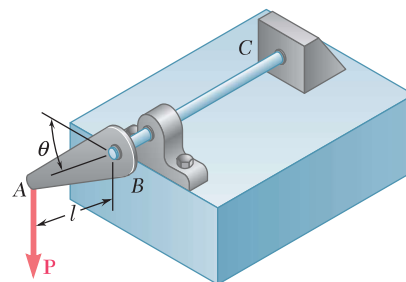


Figura P10.39

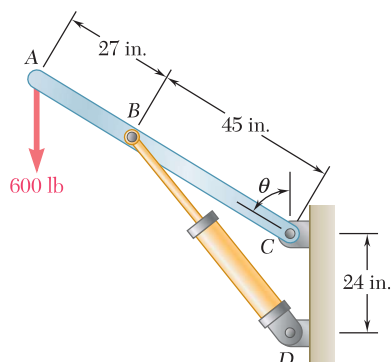


Figura P10.41 y P10.42

10.42 La posición del pescante ABC se controla mediante un cilindro hidráulico BD . Para la carga mostrada, *a)* exprese la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico sobre el pasador B en función de la longitud BD , *b)* determine el valor mínimo posible del ángulo θ si la fuerza máxima que el cilindro puede ejercer sobre el pasador B es de 2.5 kips.

10.43 La posición del elemento ABC se controla por medio del cilindro hidráulico CD , como se muestra en la figura. Para la carga mostrada, determine la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico sobre el pasador C cuando $\theta = 55^\circ$.

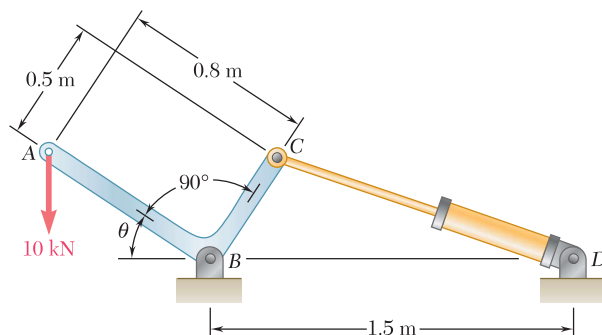


Figura P10.43 y P10.44

10.44 La posición del elemento ABC se controla por medio del cilindro hidráulico CD , como se muestra en la figura. Si se sabe que el cilindro hidráulico ejerce una fuerza de 15 kN sobre el pasador C , determine el valor del ángulo θ .

10.45 El brazo de extensión telescópica ABC se utiliza para levantar una plataforma con trabajadores de la construcción. El peso conjunto de los trabajadores y de la plataforma es de 500 lb y su centro de gravedad combinado se localiza directamente por encima de C . Para la posición en la cual $\theta = 20^\circ$, determine la fuerza ejercida sobre el pasador B por el cilindro hidráulico único BD .

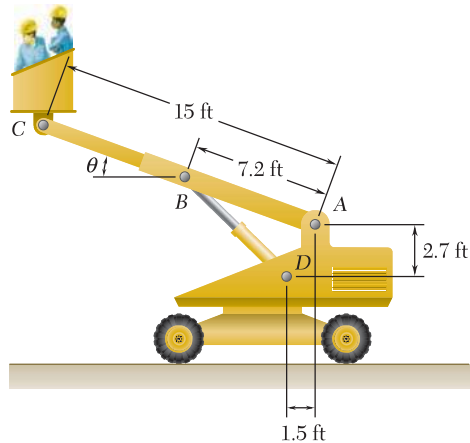


Figura P10.45

10.46 Retome el problema 10.45, y ahora suponga que los trabajadores descienden hasta un punto cercano al suelo, de modo que $\theta = -20^\circ$.

10.47 Un bloque de peso W se jala mediante una fuerza $\mathbf{P}$ dirigida hacia arriba de un plano el cual está inclinado a un ángulo α con respecto a la horizontal. Si μ es el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano, deduzca una expresión para la eficiencia mecánica del sistema. También demuestre que la eficiencia mecánica no puede ser mayor de $\frac{1}{2}$ si se desea que el bloque permanezca en su lugar cuando se retira la fuerza $\mathbf{P}$.

10.48 Si se denota con μ_s el coeficiente de fricción estática entre el bloque que se encuentra unido a la barra ACE y la superficie horizontal que se muestra en la figura, deduzca expresiones en términos de P , μ_s y θ , a fin de determinar la magnitud máxima y mínima de la fuerza $\mathbf{Q}$ para que el sistema se mantenga en equilibrio.

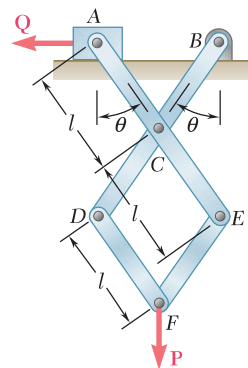


Figura P10.48 y P10.49

10.49 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el bloque que se encuentra unido a la barra ACE y la superficie horizontal que se muestra en la figura es de 0.15, determine las magnitudes máxima y mínima de la fuerza $\mathbf{Q}$ con las que el sistema se mantiene en equilibrio, para valores de $\theta = 30^\circ$, $l = 0.2$ m y $P = 40$ N.

10.50 Si se representa con μ_s el coeficiente de fricción estática entre el collarín C y la barra vertical, deduzca una expresión a fin de determinar la magnitud máxima del par $\mathbf{M}$ para que el sistema se mantenga en equilibrio en la posición que se muestra en la figura. Explique qué pasa si $\mu_s \geq \tan \theta$.

10.51 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el collarín C y la barra vertical es de 0.40, determine las magnitudes máxima y mínima del par $\mathbf{M}$ para que el sistema se mantenga en equilibrio en la posición mostrada en la figura, cuando $\theta = 35^\circ$, $l = 600$ mm y $P = 300$ N.

10.52 Obtenga una expresión para determinar la eficiencia mecánica del gato analizado en la sección 8.6. Demuestre que si el gato debe ser autobloqueante, la eficiencia mecánica no puede ser mayor de $\frac{1}{2}$.

10.53 Con el método del trabajo virtual, determine la reacción en el punto E de la viga mostrada en la figura.

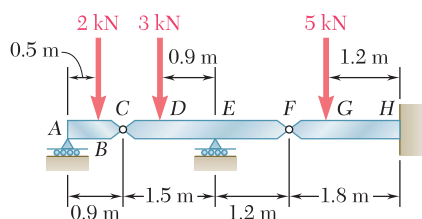


Figura P10.53 y P10.54

10.54 Con el método del trabajo virtual, determine por separado la fuerza y el par que representan la reacción en el punto H de la viga mostrada en la figura.

10.55 Con referencia al problema 10.43, utilice el valor encontrado para la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico CD y determine el cambio en la longitud de CD requerido para elevar 15 mm la carga de 10 kN.

10.56 Con referencia al problema 10.45, utilice el valor encontrado para la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico BD y determine el cambio en la longitud de BD requerido para elevar 2.5 in. la plataforma unida en C .

10.57 Para la armadura mostrada en la figura, determine el movimiento vertical del nodo D si la longitud del elemento BF se incrementa en 1.5 in. (Sugerencia: Aplique una carga vertical en el nodo D y utilice los métodos del capítulo 6 para calcular la fuerza ejercida por el elemento BF sobre los nodos B y F . Después aplique el método del trabajo virtual para un desplazamiento virtual equivalente al incremento en la longitud del elemento BF . Este método debe usarse sólo cuando hay pequeños cambios en la longitud de los elementos.)

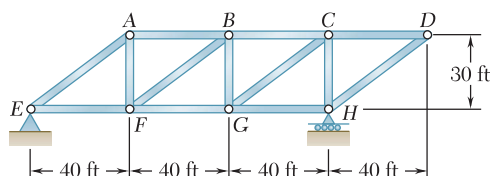


Figura P10.57 y P10.58

10.58 Para la armadura mostrada en la figura, determine el movimiento horizontal del nodo D si la longitud del elemento BF se incrementa en 1.5 in. (Vea la sugerencia para el problema 10.57.)

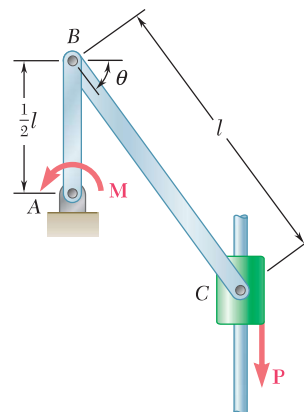


Figura P10.50 y P10.51

*10.6. TRABAJO DE UNA FUERZA DURANTE UN DESPLAZAMIENTO FINITO

Considere una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre una partícula. El trabajo de $\mathbf{F}$ correspondiente a un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}$ de la partícula se definió en la sección 10.2 como

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.1)$$

El trabajo de $\mathbf{F}$ correspondiente a un desplazamiento finito de la partícula desde A_1 hasta A_2 (figura 10.10a) se denota con $U_{1 \rightarrow 2}$ y se obtiene integrando la ecuación (10.1) a lo largo de la curva que sigue la partícula:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.11)$$

Con la expresión alternativa

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (10.1')$$

dada en la sección 10.2 para el trabajo elemental dU , también es posible expresar el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ como

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha) ds \quad (10.11')$$

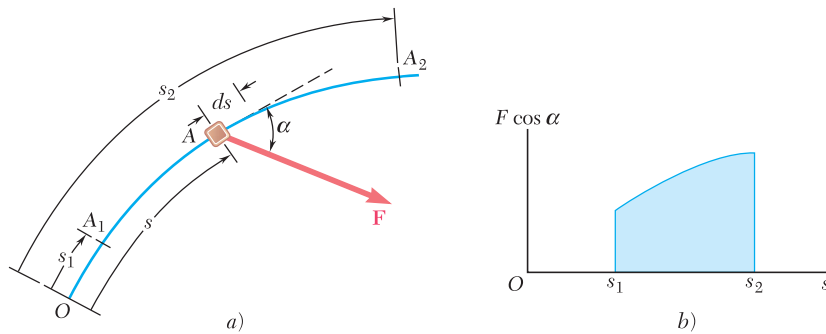


Figura 10.10

donde la variable de integración s mide la distancia recorrida por la partícula a lo largo de su trayectoria. También el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ está representado por el área bajo la curva que se obtiene al graficar $F \cos \alpha$ contra s (figura 10.10b). En el caso de que la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ que actúa en dirección del movimiento es constante, entonces de la fórmula (10.11') se obtiene que $U_{1 \rightarrow 2} = F(s_2 - s_1)$.

Si se recuerda la sección 10.2, el trabajo de un par de momento $\mathbf{M}$ que se genera durante una rotación infinitesimal $d\theta$ de un cuerpo rígido es

$$dU = M d\theta \quad (10.2)$$

entonces el trabajo de un par durante una rotación finita del cuerpo puede expresarse como:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (10.12)$$

En el caso de un par de magnitud constante, de la fórmula (10.12) se obtiene:

$$U_{1 \rightarrow 2} = M(\theta_2 - \theta_1)$$

Trabajo de un peso. En la sección 10.2 se estableció que el trabajo de un peso $\mathbf{W}$ de un cuerpo durante un desplazamiento infinitesimal de éste es igual al producto de W y el desplazamiento vertical del centro de gravedad del cuerpo. Si el eje y se dirige hacia arriba, entonces el trabajo de $\mathbf{W}$ realizado durante un desplazamiento finito del cuerpo (figura 10.11) se obtiene escribiendo

$$dU = -W dy$$

Integrando desde A_1 hasta A_2 , se tiene

$$U_{1 \rightarrow 2} = -\int_{y_1}^{y_2} W dy = Wy_1 - Wy_2 \quad (10.13)$$

o

$$U_{1 \rightarrow 2} = -W(y_2 - y_1) = -W \Delta y \quad (10.13')$$

donde Δy representa el desplazamiento vertical desde A_1 hasta A_2 . Por tanto, el trabajo del peso $\mathbf{W}$ es igual al producto de W y el desplazamiento vertical del centro de gravedad del cuerpo. Note que el trabajo es positivo cuando $\Delta y < 0$, esto es, cuando el cuerpo se mueve hacia abajo.

Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte. Considere un cuerpo A unido a un punto fijo B por medio de un resorte; se supone que el resorte está sin estirar cuando el cuerpo está en A_0 (figura 10.12a). La evidencia experimental muestra que la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por el resorte sobre el cuerpo A es directamente proporcional a la deflexión x del resorte, medida a partir de la posición A_0 . Esto es:

$$F = kx \quad (10.14)$$

donde k es la constante del resorte expresada en N/m si se usan unidades del SI y en lb/ft o lb/in. si se utilizan las unidades de uso común en Estados Unidos. El trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por el resorte durante un desplazamiento finito del cuerpo desde $A_1(x = x_1)$ hasta $A_2(x = x_2)$ se obtiene escribiendo

$$dU = -F dx = -kx dx$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (10.15)$$

Se debe tener cuidado de expresar a k y x en unidades consistentes. Por ejemplo, si se emplean las unidades de uso común en Estados Unidos, entonces k debe expresarse en lb/ft y x en pies o k en lb/in. y x en pulgadas; en el primer caso, el trabajo se obtiene en ft · lb y en el segundo en in. · lb. Además, note que el trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por el resorte sobre el cuerpo es positivo cuando $x_2 < x_1$, esto es, cuando el resorte está regresando a su posición sin estirar.

Como la ecuación (10.14) representa la ecuación de una línea recta que pasa por el origen con una pendiente k , el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ de $\mathbf{F}$ durante el desplazamiento desde A_1 hasta A_2 se puede obtener al evaluar el área bajo la curva del trapecioide mostrado en la figura 10.12b. Esto puede hacerse al calcular los valores de F_1 y F_2 y multiplicando la base Δx del trapecioide por su altura media $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Como el trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por el resorte es positivo para un valor negativo de Δx entonces, se puede escribir

$$U_{1 \rightarrow 2} = -\frac{1}{2}(F_1 + F_2) \Delta x \quad (10.16)$$

La fórmula (10.16) es usualmente más útil que la fórmula (10.15), debido a que en ésta se reducen las posibilidades de confundir las unidades involucradas.

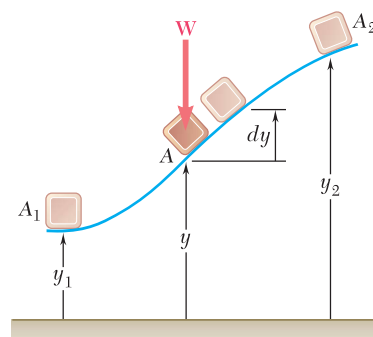


Figura 10.11

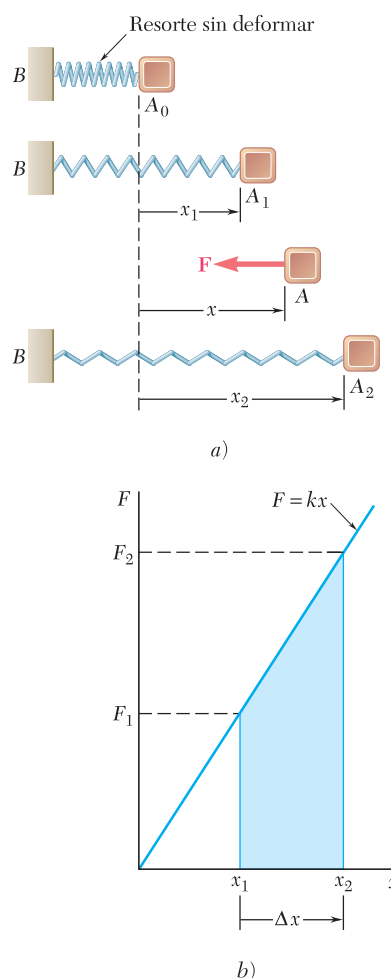


Figura 10.12

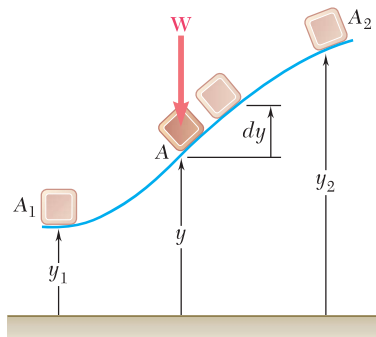


Figura 10.11 (repetida)

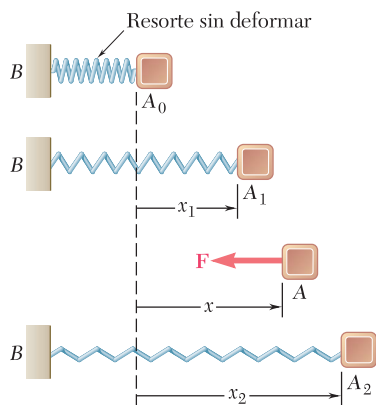


Figura 10.12a (repetida)

*10.7. ENERGÍA POTENCIAL

Considere otra vez el cuerpo de la figura 10. 11, en donde se observa con base en la ecuación (10.13) que el trabajo del peso $\mathbf{W}$ durante un desplazamiento finito se obtiene al restar el valor de la función Wy correspondiente a la segunda posición del cuerpo de su valor correspondiente a la primera posición. Por tanto, el trabajo de $\mathbf{W}$ es independiente de la trayectoria que se siga; esto es, sólo depende de los valores iniciales y finales de la función Wy . A esta función se le llama *energía potencial* del cuerpo con respecto a la fuerza de gravedad $\mathbf{W}$ y se le representa con V_g . Por tanto, se escribe

$$U_{1 \rightarrow 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2 \quad \text{con } V_g = Wy \quad (10.17)$$

Note que si $(V_g)_2 > (V_g)_1$, esto es, si la *energía potencial se incrementa* durante el desplazamiento (como sucede en el caso considerado aquí), el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ es *negativo*. Por otra parte, si el trabajo de $\mathbf{W}$ es positivo, la energía potencial disminuye. Por tanto, la energía potencial V_g del cuerpo proporciona una medida del *trabajo que puede ser realizado* por su peso $\mathbf{W}$. Como en la fórmula (10.17) sólo se involucran los *cambios* en la energía potencial y no el valor real de V_g , entonces se puede agregar una constante arbitraria a la expresión obtenida para V_g . En otras palabras, el nivel de referencia a partir del cual se mide la elevación y se puede seleccionar arbitrariamente. Nótese que la energía potencial está expresada en las mismas unidades que el trabajo, es decir, en joules (J) si se usan unidades del SI[†] y en ft · lb o en in. · lb si se utilizan las unidades de uso común en Estados Unidos.

Considere ahora el cuerpo mostrado en la figura 10.12a; se nota con base en la ecuación (10.15) que el trabajo de la fuerza elástica $\mathbf{F}$ se obtiene al restar el valor de la función $\frac{1}{2}kx^2$ correspondiente a la segunda posición del cuerpo del valor correspondiente a la primera posición del mismo. Esta función se representa con V_e y se le llama *energía potencial* del cuerpo con respecto a la *fuerza elástica* $\mathbf{F}$. Por tanto, se escribe

$$U_{1 \rightarrow 2} = (V_e)_1 - (V_e)_2 \quad \text{con } V_e = \frac{1}{2}kx^2 \quad (10.18)$$

y se observa que durante el desplazamiento considerado, el trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por el resorte sobre el cuerpo es negativo y por tanto la energía potencial V_e se incrementa. Note que la expresión que se obtuvo para V_e es válida sólo si la elongación del resorte se mide a partir de la posición sin deformar del mismo.

El concepto de energía potencial se puede extender a otros tipos de fuerzas diferentes a las gravitatorias y elásticas aquí consideradas. Éste sigue siendo válido mientras el trabajo elemental dU de las fuerzas bajo consideración sea una *diferencial exacta*. Por tanto, es posible encontrar una función V , llamada *energía potencial*, tal que

$$dU = -dV \quad (10.19)$$

Integrando la ecuación (10.19) sobre un desplazamiento finito, se obtiene la fórmula general

$$U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (10.20)$$

la cual expresa que el *trabajo de la fuerza es independiente de la trayectoria seguida y es igual al valor negativo del cambio en energía potencial*. Una fuerza que satisface la ecuación (10.20) se dice que es una *fuerza conservativa*.[‡]

[†]Véase la nota al pie de la página 559 de este capítulo.

[‡]En la sección 13.7 de *Dinámica* se presenta una exposición detallada de las fuerzas conservativas.

La aplicación del principio del trabajo virtual se simplifica en forma considerable cuando se conoce la energía potencial del sistema. En el caso de un desplazamiento virtual, la fórmula (10.19) se transforma en $\delta U = -\delta V$. Además, si la posición del sistema está definida por una sola variable independiente θ , entonces se puede escribir que $\delta V = (dV/d\theta) \delta\theta$. Como $\delta\theta$ debe ser diferente a cero, la condición $\delta U = 0$ para que el sistema se conserve en equilibrio ahora se transforma en

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad (10.21)$$

Por tanto, en términos de la energía potencial, el principio del trabajo virtual establece que *si un sistema está en equilibrio, la derivada de su energía potencial total es cero*. Si la posición del sistema depende de diversas variables independientes (esto es, si el sistema *tiene varios grados de libertad*), las derivadas parciales de V con respecto a cada una de las variables independientes debe ser cero.

Por ejemplo, considere una estructura hecha de dos elementos AC y CB que sostiene una carga W en C . La estructura se sostiene mediante un perno en A y un rodillo en B y un resorte BD une B al punto fijo D (figura 10.13a). El resorte tiene una constante k y se supone que su longitud natural es igual a AD y, por tanto, el resorte está sin estirar cuando B coincide con A . Sin tomar en cuenta las fuerzas de fricción y el peso de los elementos, se encuentra que las únicas fuerzas que realizan trabajo durante un desplazamiento de la armadura son el peso W y la fuerza F ejercida por el resorte en el punto B (figura 10.13b). De esta manera, la energía potencial total del sistema se obtiene al sumar la energía potencial V_g correspondiente a la fuerza de gravedad W y la energía potencial V_e correspondiente a la fuerza elástica F .

Al seleccionar un sistema de ejes coordenados con origen en A y observar que la elongación del resorte medida a partir de su posición sin estirar es $AB = x_B$, se escribe

$$V_e = \frac{1}{2}kx_B^2 \quad V_g = Wy_C$$

Expresando las coordenadas x_B y y_C en términos del ángulo θ , se tiene

$$\begin{aligned} x_B &= 2l \sin \theta & y_C &= l \cos \theta \\ V_e &= \frac{1}{2}k(2l \sin \theta)^2 & V_g &= W(l \cos \theta) \\ V &= V_e + V_g = 2kl^2 \sin^2 \theta + Wl \cos \theta \end{aligned} \quad (10.22)$$

Las posiciones de equilibrio del sistema se obtienen igualando a cero la derivada de la energía potencial V . Por tanto, se escribe

$$\frac{dV}{d\theta} = 4kl^2 \sin \theta \cos \theta - Wl \sin \theta = 0$$

o bien, factorizando $l \sin \theta$,

$$\frac{dV}{d\theta} = l \sin \theta (4kl \cos \theta - W) = 0$$

Así, hay dos posiciones de equilibrio que corresponden, respectivamente, a los valores de $\theta = 0$ y $\theta = \cos^{-1}(W/4kl)$.[†]

[†]La segunda posición no existe si $W > 4kl$.

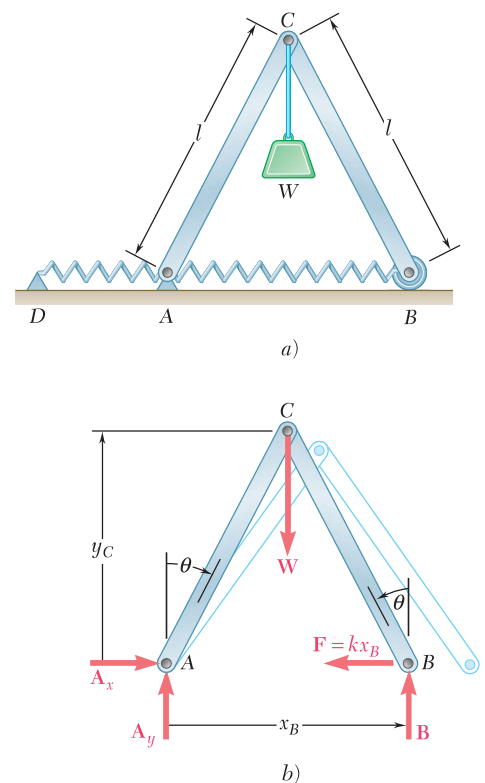
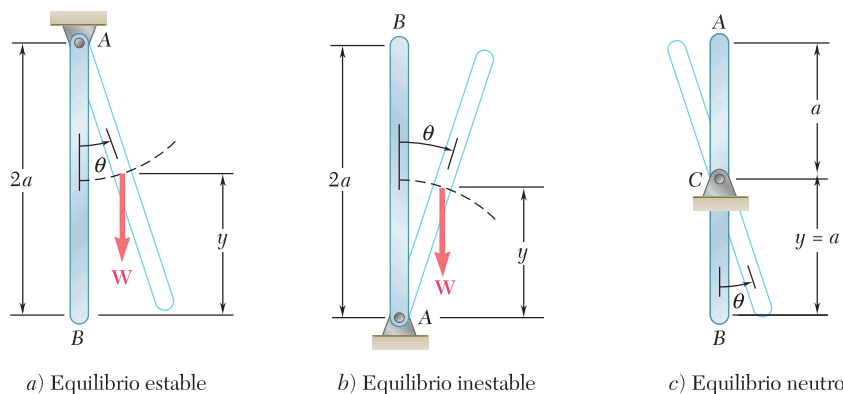


Figura 10.13

***10.9. ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO**

Considere las tres barras uniformes de longitud $2a$ y peso $\mathbf{W}$ mostradas en la figura 10.14. Aunque cada una de ellas está en equilibrio, existe una diferencia importante entre estos tres casos. Suponga que se perturba ligeramente la posición de equilibrio de cada una de estas barras y después se les deja libres: la barra a regresará a su posición original, la barra b se mantendrá alejándose cada vez más de su posición inicial mientras que la barra c permanecerá en su nueva posición. En el caso a se dice que el equilibrio de la barra es *estable*; en el caso b que es *inestable*, mientras que en el caso c es *neutro*.

**Figura 10.14**

Recuerde de la sección 10.7 que la energía potencial V_g con respecto a la gravedad es Wy , en donde y es la elevación del punto de aplicación de $\mathbf{W}$ medida a partir de un nivel arbitrario de referencia, se puede observar que la energía potencial de la barra de la figura 10.14a es mínima en la posición de equilibrio considerada mientras que en el caso de la barra de la figura 10.14b la energía potencial es máxima. En cambio, en la barra de la figura 10.14c la energía potencial permanece constante. Por tanto, el equilibrio es *estable*, *inestable* o *neutro*, lo cual depende de si la energía potencial tiene un valor *mínimo*, *máximo* o *constante* (figura 10.15).

Como el resultado anterior es muy general, se le puede ver de la siguiente manera: primero, se puede observar que una fuerza siempre tiende a realizar trabajo positivo y por tanto, reduce la energía potencial del sistema al cual se aplica. Entonces, cuando un sistema es perturbado de su posición de equilibrio, las fuerzas que actúan sobre él tienden a restaurarlo a su posición original si V es mínima (figura 10.15a) o tiende a moverlo lejos de dicha posición si V es máxima (figura 10.5b). Pero si V es constante (figura 10.15c), entonces las fuerzas no tienden a mover al sistema en ninguna forma posible.

Recuerde del cálculo diferencial que una función es mínima o máxima dependiendo de que su segunda derivada sea positiva o negativa; en resumen, se puede decir que las condiciones de equilibrio para un sistema con un grado de libertad (es decir, la posición del sis-

tema queda definida en todo instante por una sola variable independiente θ) son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} = 0 \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} > 0: & \text{equilibrio estable} \\ \frac{dV}{d\theta} = 0 \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} < 0: & \text{equilibrio inestable} \end{aligned} \quad (10.23)$$

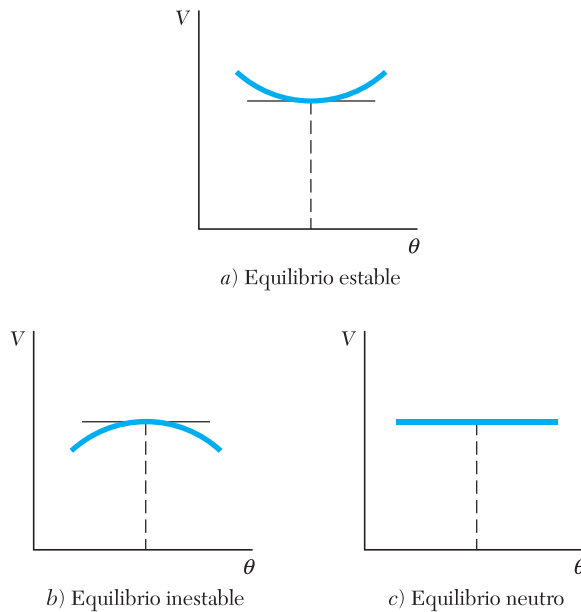
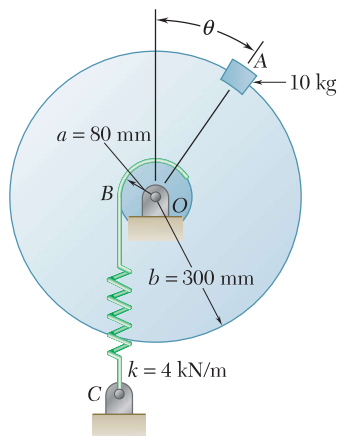


Figura 10.15

Si la primera y la segunda derivadas de V son cero, será necesario analizar las derivadas de orden superior para determinar si el equilibrio es estable, inestable o neutro. El equilibrio es neutro si todas las derivadas son cero, puesto que en este caso la energía potencial V es constante. El equilibrio es estable si la primera derivada que se tiene un valor diferente de cero es de orden par y positiva. En todos los demás casos, el equilibrio es inestable.

Si el sistema en estudio tiene *varios grados de libertad*, entonces la energía potencial V depende de diversas variables, por esta razón es necesario recurrir a la aplicación de la teoría para este tipo de funciones y determinar si V es mínima. Se puede demostrar que un sistema con 2 grados de libertad es estable y que la energía potencial correspondiente $V(\theta_1, \theta_2)$ es mínima siempre y cuando se cumplan de manera simultánea las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = \frac{\partial V}{\partial \theta_2} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} &< 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} > 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} &> 0 \end{aligned} \quad (10.24)$$



PROBLEMA RESUELTO 10.4

Un bloque de 10 kg se fija al borde de un disco de 300 mm de radio, como se muestra en la figura. Si se sabe que el resorte BC está sin estirar cuando $\theta = 0$, determine la posición o posiciones de equilibrio del sistema y establezca, en cada caso, si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

SOLUCIÓN

Energía potencial. Represente con s la elongación del resorte, medida a partir de su posición sin deformar y ubique el origen de un sistema de coordenadas en O , se obtendrá

$$V_e = \frac{1}{2}ks^2 \quad V_g = Wy = mgy$$

Midiendo θ en radianes, se tiene

$$s = a\theta \quad y = b \cos \theta$$

Al sustituir los valores de s y y en las expresiones de V_e y V_g se escribe

$$V_e = \frac{1}{2}ka^2\theta^2 \quad V_g = mgb \cos \theta$$

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2}ka^2\theta^2 + mgb \cos \theta$$

Posiciones de equilibrio. Si se establece $dV/d\theta = 0$, se escribe

$$\frac{dV}{d\theta} = ka^2\theta - mgb \sin \theta = 0$$

$$\sin \theta = \frac{ka^2}{mgb} \theta$$

Sustituya $a = 0.08$ m, $b = 0.3$ m, $k = 4$ kN/m y $m = 10$ kg, se obtiene

$$\sin \theta = \frac{(4 \text{ kN/m})(0.08 \text{ m})^2}{(10 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(0.3 \text{ m})} \theta$$

$$\sin \theta = 0.8699 \theta$$

donde θ está expresada en radianes. Si busca numéricamente el valor de θ , se encuentra

$$\begin{array}{lll} \theta = 0 & y & \theta = 0.902 \text{ rad} \\ \theta = 0 & y & \theta = 51.7^\circ \end{array} \quad \blacktriangleleft$$

Estabilidad del equilibrio. La segunda derivada de la energía potencial V con respecto a θ es

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = ka^2 - mgb \cos \theta$$

$$= (4 \text{ kN/m})(0.08 \text{ m})^2 - (10 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(0.3 \text{ m}) \cos \theta$$

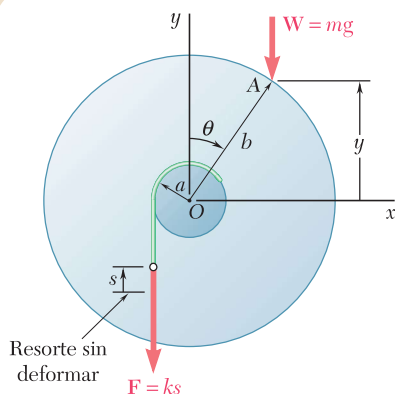
$$= 25.6 - 29.43 \cos \theta$$

Para $\theta = 0$: $\frac{d^2V}{d\theta^2} = 25.6 - 29.43 \cos 0 = -3.83 < 0$

El equilibrio es inestable para $\theta = 0$ $\blacktriangleleft$

Para $\theta = 51.7^\circ$: $\frac{d^2V}{d\theta^2} = 25.6 - 29.43 \cos 51.7^\circ = +7.36 > 0$

El equilibrio es estable para $\theta = 51.7^\circ$ $\blacktriangleleft$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se definió el *trabajo que realiza una fuerza durante un desplazamiento finito* y la *energía potencial* de un cuerpo rígido o un sistema de cuerpos rígidos. Se aprendió cómo utilizar el concepto de energía potencial para determinar la *posición de equilibrio* de un cuerpo rígido o sistema de cuerpos rígidos.

1. La energía potencial V de un sistema es la suma de energías potenciales asociadas con las diversas fuerzas que actúan sobre el mismo y que *realizan trabajo* conforme dicho sistema se mueve. En los problemas de esta sección se deberá determinar lo siguiente:

a) La energía potencial de un peso. Ésta es la energía potencial debida a la *gravedad*, $V_g = Wy$, donde y es la elevación del peso W medida desde un nivel arbitrario de referencia. Note que la energía potencial V_g puede usarse con cualquier fuerza vertical $\mathbf{P}$ de magnitud constante y dirigida hacia abajo; por tanto, se escribe que $V_g = Py$.

b) Energía potencial de un resorte. Ésta es la energía potencial $V_e = \frac{1}{2}kx^2$, debida a las fuerzas *elásticas* ejercidas por un resorte, en donde k es la constante del resorte y x es la deformación del resorte *medida desde su posición sin estirar*.

Las reacciones en apoyos fijos, las fuerzas internas en las uniones, las fuerzas ejercidas por cables y cuerdas inextensibles y otras fuerzas que no realizan trabajo no hacen ninguna contribución a la energía potencial del sistema.

2. Se deben expresar todas las distancias y los ángulos en términos de una sola variable, como el ángulo θ , cuando se esté calculando la energía potencial V del sistema. Esto es necesario porque para poder determinar la posición de equilibrio del sistema se requiere calcular la derivada $dV/d\theta$.

3. Cuando un sistema está en equilibrio, la primera derivada de la energía potencial es cero. Por tanto:

a) Para determinar la posición de equilibrio de un sistema, después de que la energía potencial V haya sido expresada en función de una sola variable θ , se debe calcular su derivada y después resolver la ecuación resultante $dV/d\theta = 0$ para determinar el valor de θ .

b) Para determinar la fuerza o par requerido para mantener al sistema en una posición dada de equilibrio, se debe sustituir el valor conocido de θ en la ecuación de $dV/d\theta = 0$ y obtener la solución de ésta para poder determinar los valores deseados de fuerza o par.

4. Estabilidad del equilibrio. Por lo general se deben aplicar las siguientes reglas:

a) El equilibrio estable ocurre cuando la energía potencial del sistema es *mínima*, esto es, cuando $dV/d\theta = 0$ y $d^2V/d\theta^2 > 0$ (figuras 10.14a y 10.15a).

b) El equilibrio inestable ocurre cuando la energía potencial del sistema es *máxima*, esto es, cuando $dV/d\theta = 0$ y $d^2V/d\theta^2 < 0$ (figuras 10.14b y 10.15b).

c) El equilibrio neutro ocurre cuando la energía potencial del sistema es *constante*, por tanto, $dV/d\theta$, $d^2V/d\theta^2$, así como todas las derivadas sucesivas de V son iguales a cero (figuras 10.14c y 10.15c).

Véase la página 583 para una exposición del caso cuando se tiene $dV/d\theta$ y $d^2V/d\theta^2$, pero *no todas* las derivadas sucesivas de V son iguales a cero.

Problemas

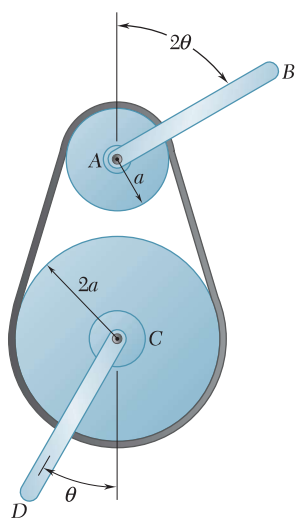


Figura P10.69

10.59 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.29.

10.60 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.30.

10.61 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.33.

10.62 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.34.

10.63 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.35.

10.64 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.36.

10.65 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.31.

10.66 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.38.

10.67 Demuestre que en el problema 10.1 el equilibrio es neutro.

10.68 Demuestre que en el problema 10.6 el equilibrio es neutro.

10.69 Dos barras uniformes idénticas, cada una con masa m y longitud l , están unidas a las poleas que se conectan por medio de una banda como se muestra en la figura. Si se supone que no existe deslizamiento entre la banda y las poleas, determine las posiciones de equilibrio del sistema y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.70 Dos barras uniformes AB y CD , con la misma longitud l , están unidas a los engranes mostrados en la figura. Si se sabe que la barra AB pesa 3 lb y que la barra CD pesa 2 lb, determine las posiciones de equilibrio del sistema y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

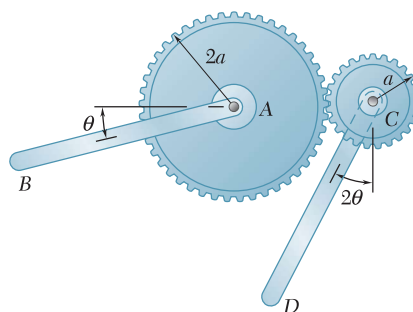


Figura P10.70

10.71 Dos barras uniformes, cada una de masa m , están unidas a los engranes de radio idéntico que se muestran en la figura. Determine las posiciones de equilibrio del sistema y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

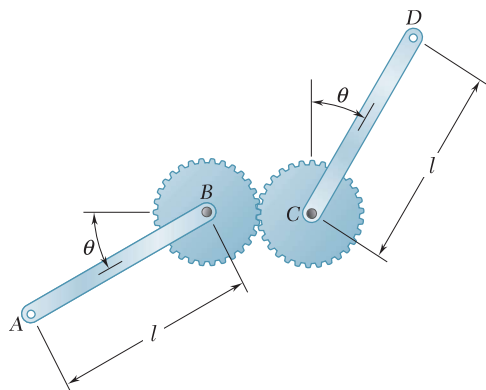


Figura P10.71 y P10.72

10.72 Dos barras uniformes, AB y CD , están unidas a los engranes de radio idéntico que se muestran en la figura. Si se sabe que $W_{AB} = 8$ lb y que $W_{CD} = 4$ lb, determine las posiciones de equilibrio del sistema y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.73 Con el método de la sección 10.8 retome el problema 10.39 y determine si el equilibrio es estable, inestable o neutro. (Sugerencia: La energía potencial correspondiente al par ejercido por un resorte de torsión es $\frac{1}{2}K\theta^2$, donde K es la constante torsional del resorte y θ es el ángulo de torsión.)

10.74 En el problema 10.40 determine si cada una de las posiciones de equilibrio es estable, inestable o neutra. (Vea la sugerencia del problema 10.73.)

10.75 Una carga W con 100 lb de magnitud se aplica en C al mecanismo mostrado en la figura. Si el resorte está sin estirar cuando $\theta = 15^\circ$, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio y verifique si el equilibrio es estable.

10.76 Una carga W con 100 lb de magnitud se aplica en C al mecanismo mostrado en la figura. Si el resorte está sin estirar cuando $\theta = 30^\circ$, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio y verifique si el equilibrio es estable.

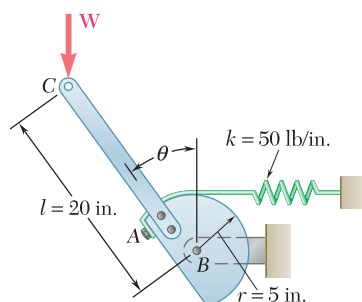


Figura P10.75 y P10.76

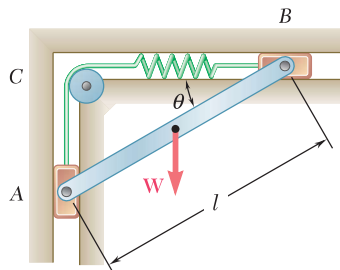


Figura P10.77 y P10.78

10.77 Una barra delgada AB de peso W está unida a dos bloques A y B , los cuales pueden moverse libremente sobre las guías mostradas en la figura. La constante del resorte es k y éste se encuentra sin estirar cuando AB está en posición horizontal. Sin tomar en cuenta el peso de los bloques, obtenga una ecuación en términos de θ , W , l y k que se cumpla cuando la barra esté en equilibrio.

10.78 Una barra delgada AB de peso W está unida a dos bloques A y B , los cuales pueden moverse libremente sobre las guías mostradas en la figura. Si se sabe que el resorte se encuentra sin estirar cuando AB está en posición horizontal, determine tres valores de θ correspondientes a la posición de equilibrio cuando $W = 300 \text{ lb}$, $l = 16 \text{ in.}$ y $k = 75 \text{ lb/in.}$ Establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.79 Una barra delgada AB , de peso W , está unida a dos bloques A y B , los cuales pueden moverse libremente sobre las guías mostradas en la figura. Si se sabe que el resorte está sin estirar cuando $y = 0$, determine el valor de y correspondiente a la posición de equilibrio cuando $W = 80 \text{ N}$, $l = 500 \text{ mm}$ y $k = 600 \text{ N/m}$.

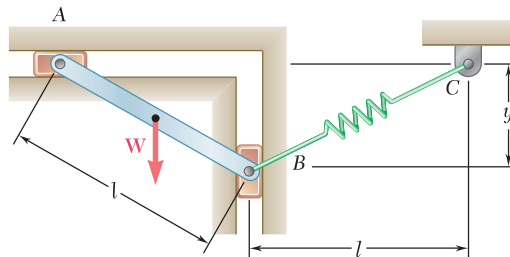


Figura P10.79

10.80 Si los dos resortes que se muestran en la figura están sin estirar cuando $y = 0$, determine el valor de y correspondiente al equilibrio cuando $W = 80 \text{ N}$, $l = 500 \text{ mm}$ y $k = 600 \text{ N/m}$.

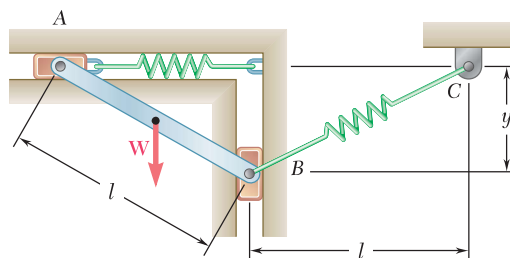


Figura P10.80

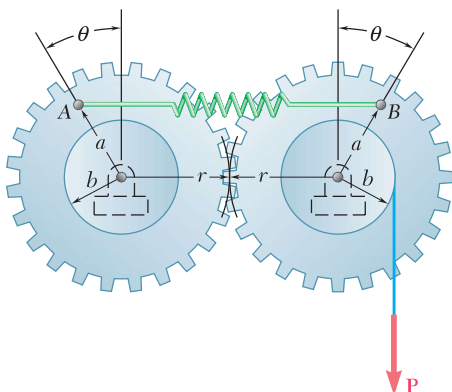


Figura P10.81 y P10.82

10.81 Un resorte AB de constante k está unido a dos engranes idénticos como muestra la figura. Si se sabe que el resorte está sin estirar cuando $\theta = 0$, determine dos valores de θ correspondientes a posiciones de equilibrio cuando $P = 30 \text{ lb}$, $a = 4 \text{ in.}$, $b = 3 \text{ in.}$, $r = 6 \text{ in.}$ y $k = 5 \text{ lb/in.}$ Establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.82 Un resorte AB de constante k está unido a dos engranes idénticos como se muestra en la figura. Si se sabe que el resorte está sin estirar cuando $\theta = 0$, y dado que $a = 60 \text{ mm}$, $b = 45 \text{ mm}$, $r = 90 \text{ mm}$ y $k = 6 \text{ kN/m}$, determine a) el intervalo de valores de P para los cuales existe una posición de equilibrio, b) dos valores de θ correspondientes a posiciones de equilibrio si el valor de P es igual a la mitad del límite superior del intervalo que se encontró en el inciso a).

10.83 Una barra delgada AB está unida a dos collarines A y B , los cuales se pueden mover libremente a lo largo de las barras guía mostradas en la figura. Si se sabe que $\beta = 30^\circ$ y que $P = Q = 400$ N, determine el valor del ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio.

10.84 Una barra delgada AB está unida a dos collarines A y B , los cuales se pueden mover libremente a lo largo de las barras guía mostradas en la figura. Si se sabe que $\beta = 30^\circ$, $P = 100$ N y $Q = 25$ N, determine el valor del ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio.

10.85 y 10.86 En las figuras se muestra un collarín A que puede deslizarse libremente sobre la barra semicircular. Si se sabe que la constante del resorte es k y que la longitud sin estirar del resorte es igual al radio r , determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $W = 50$ lb, $r = 9$ in. y $k = 15$ lb/in.

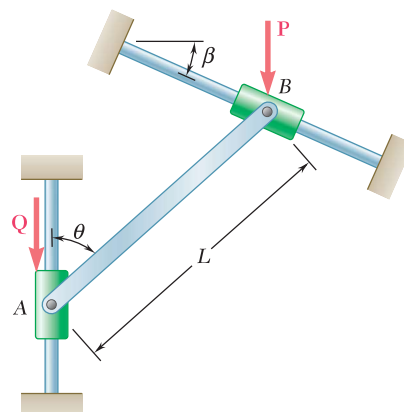


Figura P10.83 y P10.84

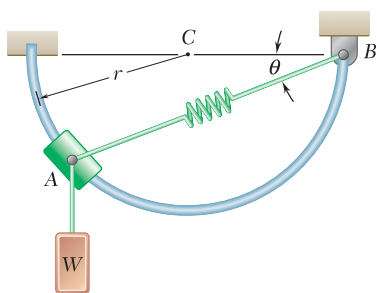


Figura P10.85

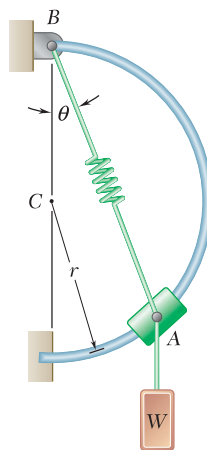


Figura P10.86

10.87 y 10.88 El carrito B , que pesa 75 kN, rueda a lo largo de una pista inclinada que forma un ángulo β con la horizontal. La constante del resorte es de 5 kN/m y éste se encuentra sin estirar cuando $x = 0$. Determine la distancia x correspondiente al equilibrio para el ángulo β indicado.

10.87 Ángulo $\beta = 30^\circ$

10.88 Ángulo $\beta = 60^\circ$

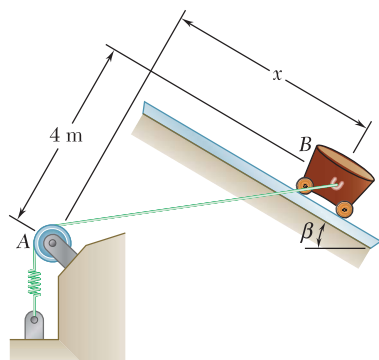


Figura P10.87 y P10.88

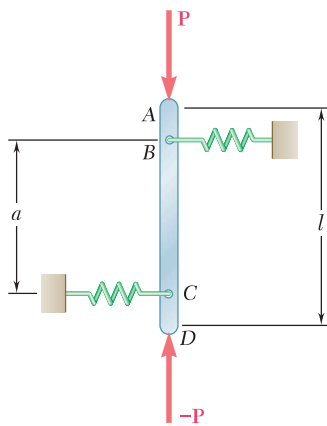


Figura P10.89

10.89 Una barra vertical AD está unida a dos resortes de constante k y se encuentra en equilibrio en la posición mostrada. Determine el intervalo de valores de la magnitud P de dos fuerzas verticales iguales y opuestas $\mathbf{P}$ y $-\mathbf{P}$, para las cuales la posición de equilibrio es estable si a) $AB = CD$, b) $AB = 2CD$.

10.90 En la figura se muestra una barra AB unida a una articulación en A y a dos resortes, cada uno con constante k . Si $h = 25$ in., $d = 12$ in., y $W = 80$ lb, determine el intervalo de valores de k para los cuales la barra está en equilibrio estable en la posición que se muestra en la figura. Cada resorte puede actuar, tanto en tensión, como en compresión.

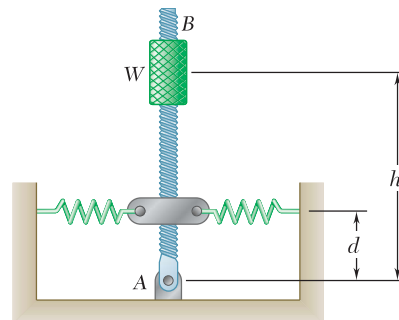


Figura P10.90 y P10.91

10.91 En la figura se muestra una barra AB unida a una articulación en A y a dos resortes, cada uno con constante k . Si $h = 45$ in., $k = 6$ lb/in. y $W = 60$ lb, determine la distancia mínima d para que la barra esté en equilibrio estable en la posición que se muestra en la figura. Cada resorte puede actuar, tanto en tensión, como en compresión.

10.92 y 10.93 En la figura se muestran dos barras unidas a un resorte de constante k el cual se encuentra sin estirar cuando las barras están en posición vertical. Determine el intervalo de valores de P para los cuales el sistema está en equilibrio estable en la posición que se muestra en la figura.

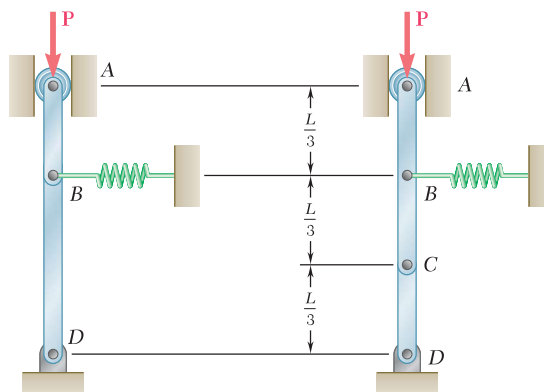


Figura P10.92 y P10.93

10.94 En la figura se muestran dos barras AB y BC unidas a un resorte de constante k , el cual se encuentra sin estirar cuando las barras están en posición vertical. Determine el intervalo de valores de P para los cuales el sistema está en equilibrio estable en la posición que se muestra en la figura.

10.95 En la figura se muestra una barra horizontal BEH conectada a tres barras verticales. El collarín en E se puede deslizar libremente sobre la barra DF . Determine el intervalo de valores de Q para los cuales el sistema está en equilibrio estable en la posición mostrada, cuando $a = 24$ in., $b = 20$ in. y $P = 150$ lb.

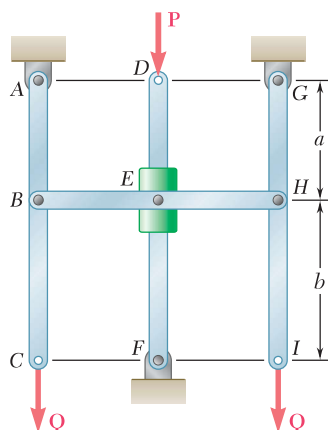


Figura P10.95 y P10.96

10.96 En la figura se muestra una barra horizontal BEH conectada a tres barras verticales. El collarín en E se puede deslizar libremente sobre la barra DF . Determine el intervalo de valores de P para los cuales el sistema está en equilibrio estable en la posición mostrada, cuando $a = 150$ mm, $b = 200$ mm y $Q = 45$ N.

***10.97** Las barras AB y BC que se muestran en la figura, cada una de longitud l y peso despreciable, están unidas a dos resortes, cada uno de constante k . El sistema está en equilibrio y los resortes se encuentran sin deformar cuando $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Determine el intervalo de valores de P para los cuales la posición de equilibrio del sistema es estable.

***10.98** Retome el problema 10.97, y ahora suponga que $l = 800$ mm y que $k = 2.5$ kN/m.

***10.99** Dos barras de peso despreciable están unidas a tambores de radio r , que a su vez se conectan mediante una banda y un resorte de constante k . Si se sabe que el resorte se encuentra sin deformar cuando las barras están en posición vertical, determine el intervalo de valores de P para los cuales la posición de equilibrio en $\theta_1 = \theta_2 = 0$ es estable.

***10.100** Retome el problema 10.99, y ahora suponga que $k = 20$ lb/in., $r = 3$ in., $l = 6$ in. y a) $W = 15$ lb, b) $W = 60$ lb.

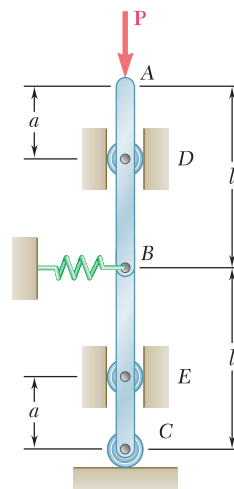


Figura P10.94

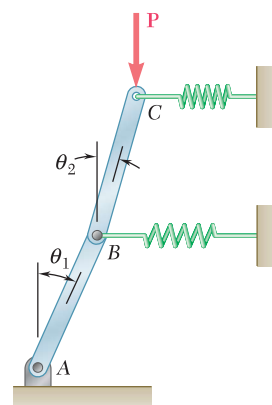


Figura P10.97

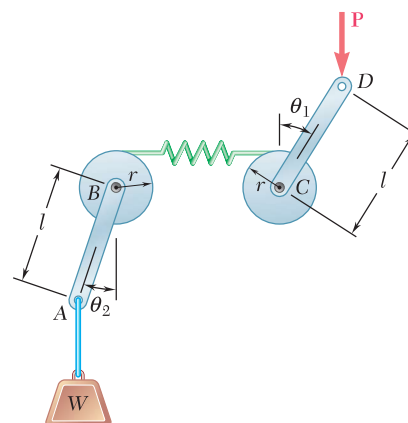


Figura P10.99

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 10

Trabajo de una fuerza

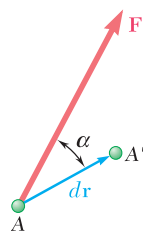


Figura 10.16

La primera parte de este capítulo se dedicó al estudio del *principio del trabajo virtual* y a su aplicación en la solución de problemas de equilibrio. Primero se definió *el trabajo de una fuerza $\mathbf{F}$ correspondiente a un desplazamiento pequeño $d\mathbf{r}$* [sección 10.2] como la cantidad

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.1)$$

la cual se obtiene al realizar el producto escalar de la fuerza $\mathbf{F}$ y el desplazamiento $d\mathbf{r}$ (figura 10.16). Si se representa con F y ds , respectivamente, las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento y con α el ángulo que forman $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$, se puede escribir

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (10.1')$$

El trabajo dU es positivo si $\alpha < 90^\circ$, cero si $\alpha = 90^\circ$ y negativo si $\alpha > 90^\circ$. También encontró que *el trabajo de un par de momento $\mathbf{M}$ que actúa sobre un cuerpo rígido es*

$$dU = M d\theta \quad (10.2)$$

donde $d\theta$ es un ángulo pequeño, expresado en radianes, sobre el que rota el cuerpo.

Desplazamiento virtual

Cuando se consideró una partícula localizada en A y sobre la que actuaban varias fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ [sección 10.3], se supuso que la partícula se movía hacia una posición A' (figura 10.17). Como en realidad el desplazamiento no ocurrió, a éste se le llamó *desplazamiento virtual* y se le representó con $\delta\mathbf{r}$, mientras que al trabajo correspondiente de las fuerzas se le llamó *trabajo virtual* y se le denotó con δU . Así se obtuvo

$$\delta U = \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \dots + \mathbf{F}_n \cdot \delta\mathbf{r}$$

Principio del trabajo virtual

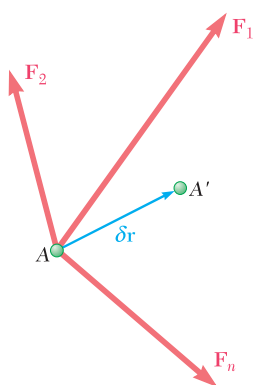


Figura 10.17

El *principio del trabajo virtual* establece que *si una partícula está en equilibrio, el trabajo virtual total δU de las fuerzas que actúan sobre las partículas es igual a cero para cualquier desplazamiento virtual de la partícula.*

El principio del trabajo virtual puede extenderse al caso de los cuerpos rígidos y sistemas de cuerpos rígidos. Como este principio está relacionado *sólo con fuerzas que realizan trabajo*, la aplicación del mismo proporciona una alternativa útil diferente al uso de las ecuaciones de equilibrio para la solución de muchos problemas de ingeniería. Dicho método es muy útil en el caso de máquinas y mecanismos que consisten en varios cuerpos rígidos conectados entre sí, debido a que el trabajo de las reacciones en los apoyos y el de las fuerzas internas en las diferentes uniones con pernos que conforman el sistema son iguales a cero [sección 10.4; problemas resueltos 10.1, 10.2 y 10.3].

Sin embargo, en el caso de *máquinas reales* [sección 10.5], el trabajo realizado por las fuerzas de fricción debe ser tomado en cuenta, por lo que *el trabajo de salida es menor que el trabajo de entrada*. Se definió la *eficiencia mecánica* de una máquina como la relación

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} \quad (10.9)$$

en donde se puntualizó que para una máquina ideal (sin fricción) $\eta = 1$, mientras que para una máquina real $\eta < 1$.

En la segunda parte de este capítulo se consideró el *trabajo realizado por las fuerzas con desplazamientos finitos* de sus puntos de aplicación. El trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ de la fuerza $\mathbf{F}$ corresponde a un desplazamiento de la partícula A desde A_1 hasta A_2 (figura 10.18) se obtuvo al integrar el término del lado derecho de la ecuación (10.1) o (10.1') a lo largo de la curva descrita por la partícula [sección 10.6]:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.11)$$

o

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha) ds \quad (10.11')$$

De manera similar, el trabajo de un par de momento $\mathbf{M}$ correspondiente a una rotación finita desde θ_1 hasta θ_2 de un cuerpo rígido se expresó como

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (10.12)$$

El *trabajo realizado por el peso $\mathbf{W}$ de un cuerpo* en el que su centro de gravedad se mueve de la altura y_1 hasta y_2 (figura 10.19) se puede obtener al hacer que $F = W$ y $\alpha = 180^\circ$ en la ecuación (10.11'):

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{y_1}^{y_2} W dy = Wy_1 - Wy_2 \quad (10.13)$$

Por tanto, el trabajo de $\mathbf{W}$ es positivo *cuando la altura y disminuye*.

Eficiencia mecánica

Trabajo de una fuerza sobre un desplazamiento finito

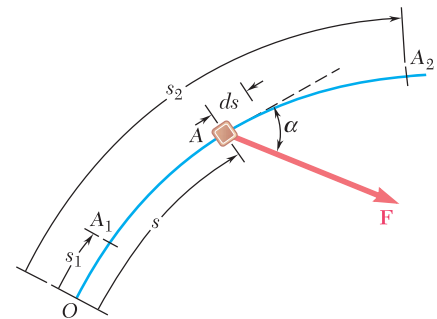


Figura 10.18

Trabajo de un peso

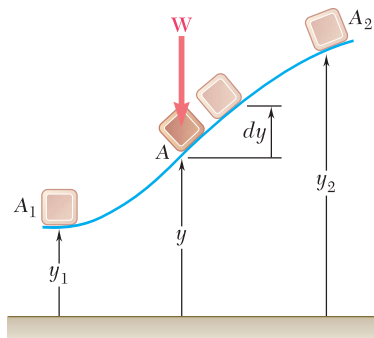


Figura 10.19

Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte

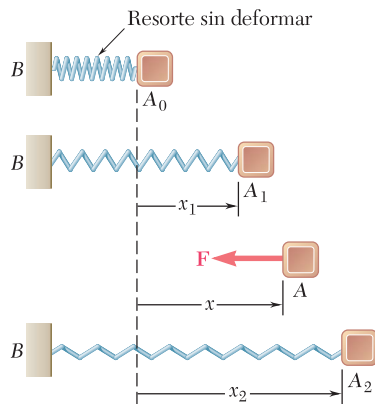


Figura 10.20

Energía potencial

Expresión alternativa para el principio del trabajo virtual

Estabilidad del equilibrio

El *trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por un resorte* sobre un cuerpo A conforme el resorte se estira desde x_1 hasta x_2 (figura 10.20) se obtiene al hacer $F = kx$, donde k es la constante del resorte y $\alpha = 180^\circ$ en la ecuación (10.11'):

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{x_1}^{x_2} kx \, dx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (10.15)$$

Así, el trabajo $\mathbf{F}$ es positivo *cuando el resorte regresa a su posición sin deformar*.

Cuando el trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ es independiente de la trayectoria real que sigue la partícula entre A_1 y A_2 , entonces se dice que la *fuerza es conservativa* y, por tanto, su trabajo realizado se expresa de la siguiente forma

$$U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (10.20)$$

donde V es la *energía potencial* asociada con $\mathbf{F}$; V_1 y V_2 representan, respectivamente, los valores de V en A_1 y A_2 [sección 10.7]. Las energías potenciales asociadas con la *fuerza de gravedad $\mathbf{W}$* y con la *fuerza elástica $\mathbf{F}$* ejercida por un resorte se expresan como

$$V_g = Wy \quad \text{y} \quad V_e = \frac{1}{2}kx^2 \quad (10.17, 10.18)$$

Cuando la posición de un sistema mecánico depende sólo de una variable independiente θ , la energía potencial $V(\theta)$ del sistema debe estar en función de esta variable y, por tanto, se concluye que $\delta U = -\delta V = -(dV/d\theta) \delta\theta$, con base en la ecuación (10.20). La condición $\delta U = 0$ requerida por el principio del trabajo virtual para que el sistema se conserve en equilibrio se puede sustituir por la condición

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad (10.21)$$

Cuando todas las fuerzas involucradas son conservativas, es más conveniente utilizar la ecuación (10.21) en lugar de aplicar directamente el principio del trabajo virtual [sección 10.8; problema resuelto 10.4].

Este enfoque presenta una ventaja más, porque es posible determinar si el equilibrio del sistema es *estable*, *inestable* o *neutro* con base en el signo de la segunda derivada de V [sección 10.9]. Por otra parte, si $d^2V/d\theta^2 > 0$, entonces V es *mínima* y el equilibrio es *estable*; pero si $d^2V/d\theta^2 < 0$, entonces V es *máxima* y el equilibrio es *inestable*. Pero si $d^2V/d\theta^2 = 0$, entonces es necesario analizar las derivadas de orden superior.

Problemas de repaso

10.101 Determine la fuerza vertical $\mathbf{P}$ que debe aplicarse en G para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura.

10.102 Determine el par $\mathbf{M}$ que debe aplicarse al elemento $DEFG$ para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura.

10.103 Obtenga una expresión para determinar la magnitud del par $\mathbf{M}$ que se requiere para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura.

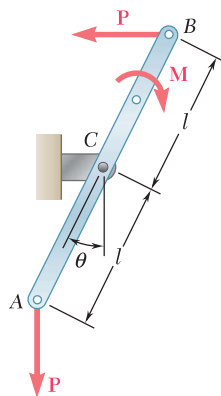


Figura P10.103

10.104 Los collarines A y B se conectan mediante el alambre AB y pueden deslizarse libremente por la varilla que se muestra en la figura. Si la longitud del alambre AB es de 440 mm y el peso del collarín A es de 90 N, determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$ necesaria para mantener el equilibrio del sistema cuando a) $c = 80$ mm, b) $c = 280$ mm.

10.105 El collarín B puede deslizarse a lo largo de la barra AC y está unido mediante un pasador a un bloque que se puede deslizar por la ranura vertical mostrada en la figura. Deduzca una expresión para determinar la magnitud del par $\mathbf{M}$ que se requiere para mantener el equilibrio.

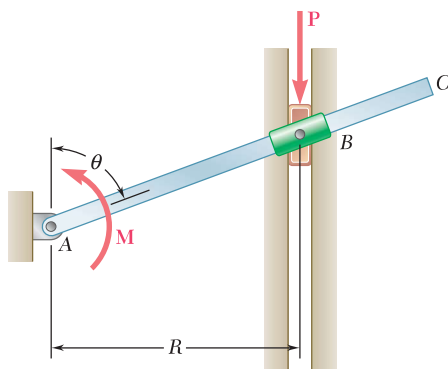


Figura P10.105

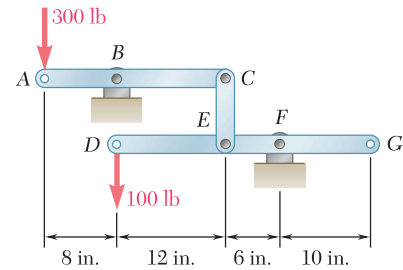


Figura P10.101 y P10.102

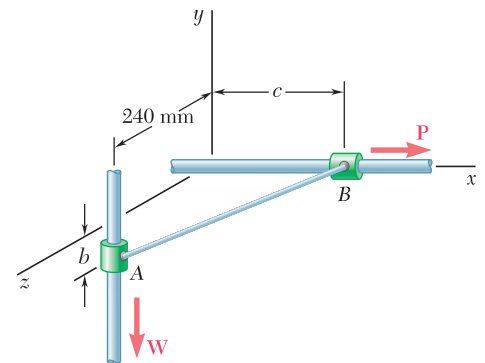


Figura P10.104

10.106 En la figura se muestra una barra delgada de longitud l , unida a un collarín en B y apoyada sobre una porción del cilindro circular de radio r . Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio del mecanismo cuando $l = 200$ mm, $r = 60$ mm, $P = 40$ N y $Q = 80$ N.

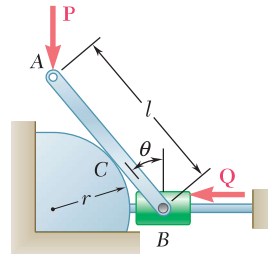


Figura P10.106

10.107 Una fuerza horizontal P con 40 lb de magnitud se aplica en el punto C del mecanismo mostrado en la figura. El resorte de constante $k = 9$ lb/in. se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio.

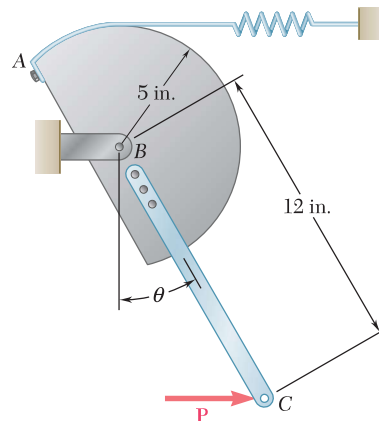


Figura P10.107

10.108 Dos barras idénticas ABC y DBE están conectadas por medio de un pasador en B y mediante un resorte CE . Si el resorte tiene 4 in. de longitud cuando está sin estirar y la constante del resorte es de 8 lb/in., determine la distancia x correspondiente a la posición de equilibrio cuando se aplica una carga de 24 lb en E .

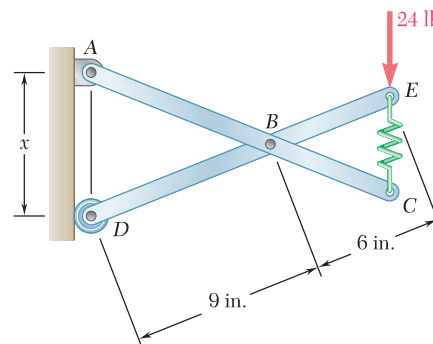


Figura P10.108

10.109 Retome el problema 10.108, y ahora suponga que la carga de 24 lb se aplica en C en vez de en E .

10.110 Dos barras uniformes, cada una de masa m y longitud l , están unidas a los engranes mostrados en la figura. Para el intervalo de valores de $0 \leq \theta \leq 180^\circ$, determine las posiciones de equilibrio del sistema y establezca en cada caso si es estable, inestable o neutro.

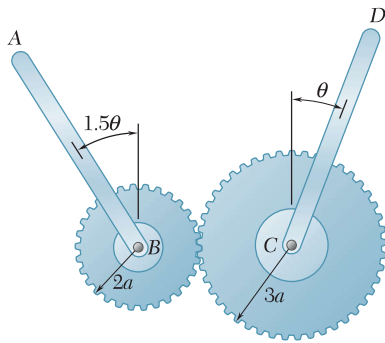


Figura P10.110

10.111 Una semiesfera homogénea de radio r se coloca sobre un plano inclinado como se muestra en la figura. Si se supone que la fricción basta para evitar el deslizamiento entre la semiesfera y el plano inclinado, determine el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $\beta = 10^\circ$.

10.112 Una semiesfera homogénea de radio r se coloca sobre un plano inclinado como se muestra en la figura. Si se supone que la fricción basta para evitar el deslizamiento entre la semiesfera y el plano inclinado, determine *a*) el máximo ángulo β para el cual existe una posición de equilibrio, *b*) el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando el ángulo β es igual a la mitad del valor que se encontró en el inciso *a*).

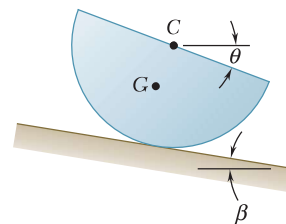


Figura P10.111 y P10.112

Problemas de computadora

10.C1 Para mantener el equilibrio del sistema motriz mostrado en la figura, cuando se aplica una fuerza $\mathbf{P}$ sobre el pistón, es necesario aplicar un par $\mathbf{M}$ sobre la manivela AB . Si se sabe que $b = 2.4$ in. y que $l = 7.5$ in., utilice software para calcular la relación M/P para valores de θ desde 0 hasta 180° con incrementos de 10° . Determine el valor de θ para el cual la relación M/P es máxima y el valor correspondiente de dicha relación.

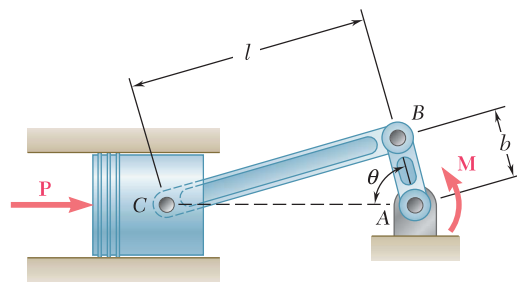


Figura P10.C1

10.C2 Si se sabe que para el mecanismo mostrado en la figura $a = 500$ mm, $b = 150$ mm, $L = 500$ mm y $P = 100$ N, utilice software para calcular la fuerza en el elemento BD para valores de θ entre 30 y 150° con incrementos de 10° . Use incrementos menores adecuados y determine el intervalo de valores de θ para los cuales el valor absoluto de la fuerza en el elemento BD es menor que 400 N.

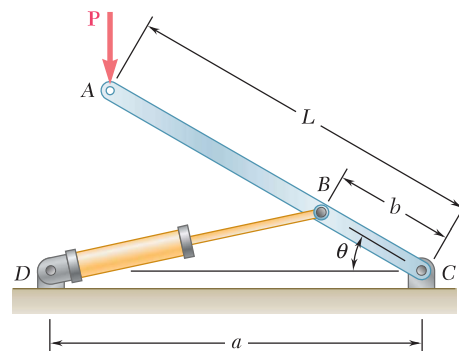


Figura P10.C2

10.C3 Retome el problema 10.C2, y ahora suponga que la fuerza $\mathbf{P}$ aplicada en A se dirige horizontalmente hacia la derecha.

10.C4 En la figura se muestra un resorte AB de constante k que se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$. *a)* Sin tomar en cuenta el peso del elemento BCD , utilice software para calcular la energía potencial del sistema y su derivada $dV/d\theta$. *b)* Para $W = 150$ lb, $a = 10$ in. y $k = 75$ lb/in., calcule y grafique la energía potencial contra θ para valores de θ desde 0 hasta 165° , con incrementos de 15° . *c)* Use incrementos menores adecuados y determine los valores de θ para los cuales el sistema está en equilibrio, y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

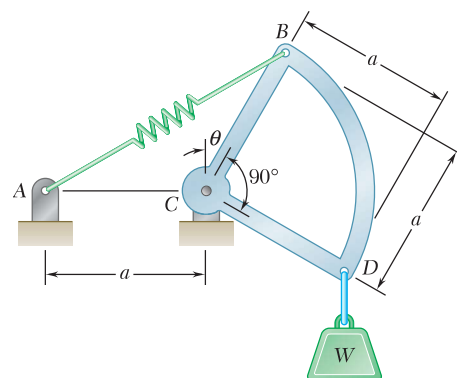


Figura P10.C4

10.C5 Dos barras AC y DE , cada una con longitud L , están conectadas mediante un collarín que se une a la barra AC en su punto medio B . *a)* Use software para calcular la energía potencial V del sistema y su derivada $dV/d\theta$. *b)* Para $W = 75$ N, $P = 200$ N y $L = 500$ mm, calcule V y $dV/d\theta$ para valores de θ desde 0 hasta 70° con incrementos de 5° . *c)* Utilice incrementos menores adecuados y determine los valores de θ para los cuales el sistema está en equilibrio, y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

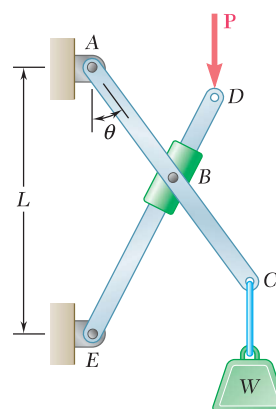


Figura P10.C5

10.C6 Una barra delgada ABC está unida a los bloques A y B , que pueden moverse libremente por las guías mostradas en la figura. La constante del resorte es k y éste se encuentra sin estirar cuando la barra está en posición vertical. *a)* Sin tomar en cuenta los pesos de la barra y de los bloques, use software para calcular la energía potencial V del sistema y su derivada $dV/d\theta$. *b)* Para $P = 150$ N, $l = 200$ mm y $k = 3$ kN/m, calcule y grafique la energía potencial contra θ para valores de θ desde 0 hasta 75° con incrementos de 5° . *c)* Use incrementos menores adecuados para determinar cualesquiera posiciones de equilibrio en el intervalo $0 \leq \theta \leq 75^\circ$, y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

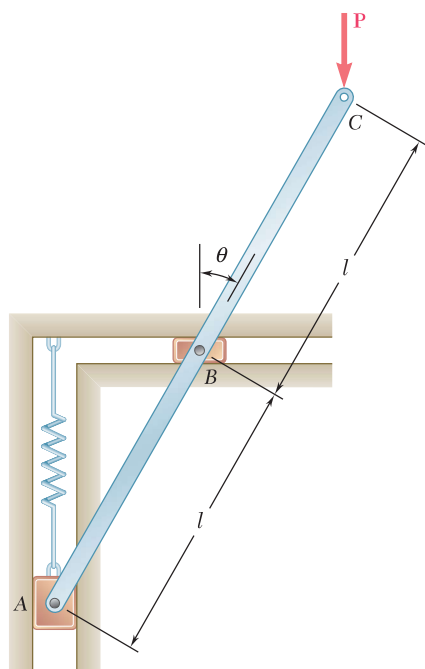


Figura P10.C6

10.C7 Retome el problema 10.C6, y ahora suponga que la fuerza P aplicada en C se dirige horizontalmente hacia la derecha.

- 9.193 a) $7 \text{ m}^2/18$. b) 0.819 m^2 .
 9.195 $I_x = 0.877 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $I_y = 1.982 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $I_z = 1.652 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.C1 $\theta = 20^\circ$; $I_{x'} = 14.20 \text{ in}^4$, $I_{y'} = 3.15 \text{ in}^4$, $I_{x'y'} = -3.93 \text{ in}^4$.
 9.C3 a) $\bar{I}_{x'} = 371 \times 10^3 \text{ mm}^4$, $\bar{I}_{y'} = 64.3 \times 10^3 \text{ mm}^4$;
 $\bar{k}_{x'} = 21.3 \text{ mm}$, $\bar{k}_{y'} = 8.87 \text{ mm}$. b) $\bar{I}_{x'} = 40.4 \text{ in}^4$,
 $\bar{I}_{y'} = 46.5 \text{ in}^4$; $\bar{k}_{x'} = 1.499 \text{ in}$, $\bar{k}_{y'} = 1.607 \text{ in}$.
 c) $\bar{k}_x = 2.53 \text{ in}$, $\bar{k}_y = 1.583 \text{ in}$. d) $\bar{k}_x = 1.904 \text{ in}$,
 $\bar{k}_y = 0.950 \text{ in}$.
 9.C5 a) $5.99 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. b) $77.4 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.C6 a) $74.0 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$. b) $645 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.
 c) $208 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.

CAPÍTULO 10

- 10.1 $82.5 \text{ N} \downarrow$.
 10.2 $120 \text{ lb} \rightarrow$.
 10.3 $49.5 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
 10.4 $1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in} \cdot \uparrow$.
 10.7 a) 60.0 N C , $8.00 \text{ mm} \downarrow$. b) 300 N C , $40.0 \text{ mm} \downarrow$.
 10.8 a) 120.0 N C , $16.00 \text{ mm} \downarrow$. b) 300 N C , $40.0 \text{ mm} \downarrow$.
 10.9 $Q = 2P \sin \theta / \cos \theta/2$.
 10.10 $Q = 2P \cos \theta / \cos \theta/2$.
 10.11 $Q = (3P/2) \tan \theta$.
 10.12 $Q = P[(l/a)\cos^3 \theta - 1]$.
 10.15 $M = \frac{1}{2}Wl \tan \alpha \sin \theta$.
 10.16 $M = Pl/2 \tan \theta$.
 10.17 $M = 7Pa \cos \theta$.
 10.18 a) $M = Pl \sin 2\theta$. b) $M = 3Pl \cos \theta$. c) $M = Pl \sin \theta$.
 10.21 $85.2 \text{ lb} \cdot \text{ft} \downarrow$.
 10.22 $22.8 \text{ lb} \nearrow 70.0^\circ$.
 10.24 36.4° .
 10.25 38.7° .
 10.26 68.0° .
 10.28 19.81° y 51.9° .
 10.30 25.0° .
 10.31 39.7° y 69.0° .
 10.32 52.2° .
 10.33 40.2° .
 10.35 22.6° .
 10.36 51.1° .
 10.37 52.4° .
 10.38 19.40° .
 10.39 59.0° .
 10.40 78.7° , 324° , 379° .
 10.43 $12.03 \text{ kN} \searrow$.
 10.44 20.4° .
 10.45 $2\,370 \text{ lb} \nwarrow$.
 10.46 $2\,550 \text{ lb} \nwarrow$.
 10.47 $\eta = 1/(1 + \mu \cot \alpha)$.
 10.49 37.6 N , 31.6 N .
 10.51 $300 \text{ N} \cdot \text{m}$, $81.8 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 10.52 $\eta = \tan \theta / \tan (\theta + \phi_s)$.
 10.53 $7.75 \text{ kN} \uparrow$.
 10.54 $H = 1.361 \text{ kN} \uparrow$; $M_H = 550 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
 10.57 $0.833 \text{ in} \downarrow$.
 10.58 $0.625 \text{ in} \rightarrow$.
 10.66 19.40° .
 10.67 El equilibrio es neutro.
 10.69 $\theta = 0$ y $\theta = 180.0^\circ$, inestable;
 $\theta = 75.5^\circ$ y $\theta = 284^\circ$, estable.
 10.70 $\theta = 90.0^\circ$ y $\theta = 270^\circ$ inestable;
 $\theta = 22.0^\circ$ y $\theta = 158.0^\circ$, estable.
 10.71 $\theta = -45.0^\circ$, inestable; $\theta = 135.0^\circ$, estable.
 10.72 $\theta = -63.4^\circ$, inestable; $\theta = 116.6^\circ$, estable.
 10.73 59.0° estable.
 10.74 78.7° , estable; 324° , inestable; 379° , estable.
 10.78 9.39° y 90.0° , estable; 34.2° , inestable.
 10.79 357 mm .
 10.80 252 mm .
 10.81 17.11° , estable; 72.9° , inestable.
 10.83 49.1° .
 10.85 54.8° .
 10.86 37.4° .
 10.88 16.88 m .
 10.90 $k > 6.94 \text{ lb/in}$.
 10.91 15.00 in .
 10.92 $P < 2kL/9$.
 10.93 $P < kL/18$.
 10.94 $P < k(l - a^2/2l)$.
 10.96 $P < 160.0 \text{ N}$.
 10.98 $P < 764 \text{ N}$.
 10.100 a) $P < 10.00 \text{ lb}$. b) $P < 20.0 \text{ lb}$.
 10.101 $60.0 \text{ lb} \downarrow$.
 10.102 $600 \text{ lb} \cdot \text{in} \cdot \downarrow$.
 10.104 a) 20.0 N . b) 105.0 N .
 10.106 39.2° .
 10.107 60.4° .
 10.108 7.13 in .
 10.110 a) 0, inestable. b) 137.8° , estable.
 10.112 a) 22.0° . b) 30.6° .
 10.C1 $\theta = 60^\circ$: 2.42 in ; $\theta = 120^\circ$: 1.732 in ;
 $(M/P)_{\text{máx}} = 2.52 \text{ in}$. en $\theta = 73.7^\circ$.
 10.C2 $\theta = 60^\circ$: 171.1 N C . Para $32.5^\circ \leq \theta \leq 134.3^\circ$, $|F| \leq 400 \text{ N}$.
 10.C3 $\theta = 60^\circ$: 296 N T . Para $\theta \leq 125.7^\circ$, $|F| \leq 400 \text{ N}$.
 10.C4 b) $\theta = 60^\circ$, nivel de referencia en C: $V = -294 \text{ in} \cdot \text{lb}$.
 c) 34.2° , estable; 90° , inestable; 145.8° , estable.
 10.C5 b) $\theta = 50^\circ$, nivel de referencia en E: $V = 100.5 \text{ J}$.
 $dV/d\theta = 22.9 \text{ J}$.
 c) $\theta = 0$, inestable; 30.4° .
 10.C6 b) $\theta = 60^\circ$, nivel de referencia en B: 30.0 J .
 c) $\theta = 0$, inestable; 41.4° , estable.
 10.C7 b) $\theta = 60^\circ$, nivel de referencia en $\theta = 0$: -37.0 J . c) 52.2° , estable.