

MOVIMIENTO AMORTIGUADO

1.- Movimiento amortiguado.

1.1.- Ecuación de movimiento.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad \lambda = \frac{\beta}{2m} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2.- Circuito LRC.

2.1.- Ecuación de movimiento.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0, \quad \lambda = \frac{R}{2L} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

3.- Sistema críticamente amortiguado ($\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$).

3.1.- Posición de la partícula (elongación) en función del tiempo.

Solución general de la ecuación diferencial:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\lambda t}$$

3.2.- Conocida la posición inicial y la rapidez inicial.

$$x(t) = e^{-\lambda t} [x_0 + (v_0 + x_0 \lambda) t]$$

3.3.- Rapidez de la partícula en función del tiempo.

$$v(t) = e^{-\lambda t} [v_0 - (v_0 + x_0 \lambda) \lambda t]$$

3.4.- Tiempo en el cual el objeto pasa por el punto de equilibrio.

$$t = -\frac{x_0}{v_0 + x_0 \lambda}$$

3.5.- Tiempo en el cual el objeto alcanza la elongación máxima.

$$t = \frac{v_0}{\lambda (v_0 + x_0 \lambda)}$$

3.6.- Constante de amortiguamiento crítica.

Si la constante de amortiguamiento β crece gradualmente, la frecuencia angular ω disminuye hasta hacerse igual a cero en el valor crítico.

$$\beta_c = 2m\omega_0$$

Sistema masa – resorte críticamente amortiguado: $\beta = \sqrt{4km}$

Circuito LRC críticamente amortiguado: $R = \sqrt{\frac{4L}{C}}$

4.- Sistema sobreamortiguado ($\lambda^2 - \omega_0^2 > 0$).

4.1.- Posición de la partícula (elongación) en función del tiempo.

Solución general de la ecuación diferencial:

$$x(t) = e^{-\lambda t} (c_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t})$$

4.2.- Conocida la posición inicial y la rapidez inicial.

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{-\lambda t} \left[\left(x_0 + \frac{v_0 + x_0 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \right) e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + \left(x_0 - \frac{v_0 + x_0 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \right) e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} \right]$$

4.3.- Rapidez de la partícula en función del tiempo.

$$v(t) = \frac{1}{2} e^{-\lambda t} \left[\left(v_0 - \frac{x_0 \omega_0^2 + v_0 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \right) e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + \left(v_0 + \frac{x_0 \omega_0^2 + v_0 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \right) e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} \right]$$

4.4.- Tiempo en el cual el objeto pasa por el punto de equilibrio.

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \ln \left[\frac{v_0 + x_0 (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})}{v_0 + x_0 (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})} \right]$$

4.5.- Tiempo en el cual el objeto alcanza la elongación máxima.

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \ln \left[\frac{x_0 \omega_0^2 + v_0 (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})}{x_0 \omega_0^2 + v_0 (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})} \right]$$

5.- Sistema subamortiguado ($\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$).

5.1.- Posición de la partícula (elongación) en función del tiempo.

Solución general de la ecuación diferencial:

$$x(t) = c_1 e^{-\lambda t} \cos(\omega t) + c_2 e^{-\lambda t} \sin(\omega t) \quad x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + x_0 \lambda}{\omega} \right)^2}. \quad \text{El ángulo de fase } \phi \text{ se determina y ajusta según sea el caso:}$$

$$x_0 = A, v_0 + x_0 \lambda < 0: \phi = 0$$

$$x_0 = A, v_0 + x_0 \lambda > 0: \phi = \pi$$

$$x_0 = 0, v_0 + x_0 \lambda > 0: \phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$x_0 = 0, v_0 + x_0 \lambda < 0: \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$x_0 > 0, v_0 + x_0 \lambda = 0: \phi = -\pi$$

$$x_0 < 0, v_0 + x_0 \lambda = 0: \phi = \pi$$

$$x_0 > 0, v_0 + x_0 \lambda > 0: \phi = 2\pi + \tan^{-1} \left(-\frac{v_0 + x_0 \lambda}{x_0 \omega} \right)$$

$$x_0 > 0, v_0 + x_0 \lambda < 0: \phi = \tan^{-1} \left(-\frac{v_0 + x_0 \lambda}{x_0 \omega} \right)$$

$$x_0 < 0, v_0 + x_0 \lambda > 0: \phi = \pi + \tan^{-1} \left(-\frac{v_0 + x_0 \lambda}{x_0 \omega} \right)$$

$$x_0 < 0, v_0 + x_0 \lambda < 0: \phi = \pi + \tan^{-1} \left(-\frac{v_0 + x_0 \lambda}{x_0 \omega} \right)$$

5.2.- Amplitud del movimiento.

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

5.3.- Conocida la posición inicial y la rapidez inicial.

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left[x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + x_0 \lambda}{\omega} \sin(\omega t) \right]$$

$$v(t) = e^{-\lambda t} \left[v_0 \cos(\omega t) + \frac{x_0 (\omega^2 - \lambda^2) - v_0 \lambda}{\omega} \sin(\omega t) \right]$$

5.4.- Tiempo en el cual el objeto pasa por el punto de equilibrio.

$$t = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left(-\frac{x_0 \omega}{v_0 + x_0 \lambda} \right)$$

Si el valor de t resultare negativo, se ajusta sumándole π/ω hasta que sea positivo.

5.5.- Tiempo en el cual el objeto alcanza la elongación máxima.

$$t = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left[-\frac{v_0 \omega}{x_0 (\omega^2 - \lambda^2) - v_0 \lambda} \right]$$

Si el valor de t resultare negativo, se ajusta sumándole π/ω hasta que sea positivo.

5.6.- Constante de tiempo o tiempo de extinción (τ).

La constante de tiempo, o tiempo de extinción es el tiempo necesario para que la energía disminuya en un factor e^{-1} .

$$\tau = \frac{m}{\beta}$$

5.7.- Factor de calidad.

Un oscilador amortiguado se describe normalmente por su factor Q (o factor de calidad):

$$Q = \omega_0 \tau$$

5.8.- Frecuencia angular en función del factor de calidad.

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

6.- Oscilaciones forzadas.

6.1.- Ecuación de movimiento.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_f t$$

6.2.- Amplitud.

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\beta \omega_f}{m}\right)^2}}$$

En ausencia de amortiguamiento:

$$A = \frac{F_0 / m}{|\omega_f^2 - \omega_0^2|}$$

7.- Resonancia.

7.1.- Condiciones para un sistema resonante.

$$\beta \rightarrow 0, \omega_f \approx \omega_0$$

7.2.- Energía en el oscilador amortiguado.

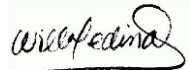
$$E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad E(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina.**

Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**

e-mail: **medinawj@gmail.com**

Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:

<https://www.tutoruniversitario.com/>

Puerto La Cruz, abril de 2026.