

observación. Se denota con S . 4.- La variable aleatoria X , el número de ocurrencias del evento en el intervalo de tamaño S , corresponde a una distribución de Poisson, con parámetro $k = \lambda S$.

Relación entre la distribución binomial y la distribución de Poisson. En la distribución binomial, si n es grande y la probabilidad de ocurrencia de un suceso es muy pequeña, de modo que $1 - p$ es casi 1, el suceso se llama un suceso raro. En la práctica, un suceso se considera raro si el número de ensayos es al menos 50 ($n \geq 50$) mientras np es menor que 5. En tal caso, la distribución binomial queda aproximada muy estrechamente por la distribución de Poisson con $\lambda = np$.

DISTRIBUCIONES CONTINUAS.

Variable aleatoria continua. Una variable aleatoria **continua** es una variable aleatoria que tiene como rango un intervalo (sea finito o infinito) de números reales. Ejemplo: corriente eléctrica, longitud, presión, temperatura, tiempo, voltaje, peso.

Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea una densidad continua. Para una variable aleatoria continua X , un **función de densidad de probabilidad** es una función tal que

$$1.- f(x) \geq 0 \quad 2.- \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$3.- P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{Área bajo } f(x) \text{ de } a \text{ a } b, \text{ para } a \text{ y } b \text{ cualesquiera}).$$

Si X es una variable aleatoria continua, entonces para cualesquiera x_1 y x_2 : $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2)$

Media y varianza de una variable aleatoria continua. Suponga que X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$.

La **media** o **valor esperado** de X , denotada como μ ó $E(X)$, es $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

La **varianza** de X , denotada como $V(X)$ ó σ^2 es $\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$

La **desviación estándar** de X es $\sigma = [V(X)]^{\frac{1}{2}}$

Distribución continua uniforme. Una variable aleatoria continua X con una función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b \text{ tiene una } \mathbf{distribución continua uniforme}.$$

En una distribución continua uniforme las probabilidades son las mismas para todos los posibles resultados.

$f(x) = k$
La media y la varianza de una variable aleatoria continua uniforme X en $a \leq x \leq b$ son $\mu = E(X) = (a + b)/2$ y $\sigma^2 = V(X) = (b - a)^2/12$.

Probabilidad de que una observación caiga entre dos valores:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b - a}; \quad P(X < x_1) = \frac{x_1 - a}{b - a}; \quad P(X > x_2) = \frac{b - x_2}{b - a}$$

Distribución normal. Una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ para $-\infty < x < \infty$

tiene una distribución normal con parámetro μ , donde $-\infty < \mu < \infty$, y $\sigma > 0$. Además $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$.

A una variable aleatoria normal con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ se le llama **variable normal estándar**. Una variable aleatoria normal estándar se denota como Z .

La función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar se denota como $F(z) = P(Z \leq z)$.

Si X es una variable aleatoria normal con $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$, entonces la variable aleatoria $Z = (X - \mu)/\sigma$ es una variable aleatoria normal con $E(Z) = 0$ y $V(Z) = 1$. Es decir, Z es una variable aleatoria normal estándar.

Suponga que X es una variable aleatoria normal con media μ y varianza σ^2 . Entonces,

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z)$$

donde Z es una variable aleatoria normal estándar, y $z = (x - \mu)/\sigma$ es el **valor z** que se obtiene al estandarizar X .

Aproximación normal a la distribución binomial. Si X es una variable aleatoria binomial, entonces $Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

es aproximadamente una variable aleatoria normal estándar. La aproximación es buena para $np > 5$ y $n(1-p) > 5$.

Corrección de continuidad. La aproximación normal de una probabilidad binomial en ocasiones se modifica con un factor de corrección de 0.5 que mejora la aproximación.

$$\begin{aligned} P(X \leq x_1) &= P(X < x_1 + 0.5) & P(X < x_1) &= P(X < x_1 - 0.5) \\ P(X \geq x_1) &= P(X > x_1 - 0.5) & P(X > x_1) &= P(X > x_1 + 0.5) \\ P(x_1 \leq X \leq x_2) &= P(x_1 - 0.5 < X < x_2 + 0.5) \\ P(x_1 < X \leq x_2) &= P(x_1 + 0.5 < X < x_2 + 0.5) \\ P(x_1 \leq X < x_2) &= P(x_1 - 0.5 < X < x_2 - 0.5) \\ P(x_1 < X < x_2) &= P(x_1 + 0.5 < X < x_2 - 0.5) \\ P(X = x_1) &= P(X < x_1 + 0.5) - P(X < x_1 - 0.5) \end{aligned}$$

Aproximación normal a la distribución de Poisson. Si X es una variable aleatoria de Poisson con $E(X) = \lambda$ y $V(X) = \lambda$ entonces

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \text{ es aproximadamente una variable aleatoria normal}$$

estándar. La aproximación es buena para $\lambda > 5$.

Distribución exponencial. La variable aleatoria X que es igual a la distancia entre conteos sucesivos de un proceso de Poisson con media $\lambda > 0$ tiene una **distribución exponencial** con parámetro λ . La función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{para } 0 \leq x < \infty$$

Si la variable aleatoria X tiene una distribución exponencial con parámetro λ , entonces:

i) la función de distribución acumulada de X es $F(x) = P(X < x) = 1 - e^{-\lambda x}$

ii) la media y la varianza de X son $\mu = E(X) = 1/\lambda$ y $\sigma^2 = V(X) = 1/\lambda^2$.

Distribución de Erlang. La variable aleatoria X que es igual a la longitud del intervalo hasta que ocurren r fallas en un proceso de Poisson con media $\lambda > 0$ tiene una **distribución de Erlang** con

parámetros λ y r . La función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!} \text{ para } x > 0 \text{ y } r = 1, 2, \dots$$

Si X es una variable aleatoria de Erlang con parámetros λ y r , entonces la media y la varianza de X son $\mu = E(X) = r/\lambda$ y $\sigma^2 = V(X) = r/\lambda^2$

Función gamma. Definición. La función gamma es

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \text{ para } r > 0.$$

Distribución Gamma. La variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad $f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}$, para $x > 0$

Si X es una variable aleatoria gamma con parámetros λ y r , entonces la media y la varianza de X son $\mu = E(X) = r/\lambda$ y $\sigma^2 = V(X) = r/\lambda^2$

Distribución Beta. Se dice que una variable aleatoria X tiene una **distribución beta**, o está distribuida beta, si la función de densidad es

$$f(x) = \frac{\Gamma(r+\beta)}{\Gamma(r)\Gamma(\beta)} x^{r-1} (1-x)^{\beta-1} \text{ para } 0 < x < 1$$

Si X es una variable aleatoria beta con parámetros r y β , entonces la media y la varianza de X son $\mu = E(X) = \frac{r}{r+\beta}$ y

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{r\beta}{(r+\beta)^2(r+\beta+1)}$$

Distribución de Weibull. La variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad $f(x) = \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^\beta}$, para $x > 0$

tiene una distribución de Weibull con parámetro de escala $\delta > 0$ y parámetro de forma $\beta > 0$.

Si X tiene una distribución de Weibull con parámetros δ y β , entonces:

i) la función de distribución acumulada de X es

$$F(x) = P(X < x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^\beta}$$

ii) la media y la varianza de X son $\mu = E(X) = \delta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ y


$$\sigma^2 = V(X) = \delta^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \delta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2$$

Autor: **MSc. Ing. Williams Medina.**

Teléfono / WhatsApp: **+58-424-9744352**

e-mail: **medinawj@gmail.com**

Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:

<https://www.tutoruniversitario.com/>

Puerto La Cruz, abril de 2026.