DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA.

I.- DERIVACIÓN NUMÉRICA.

Diferencias divididas finitas hacia delante.

Primera derivada:

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h} \qquad O(h) \text{ (Primer orden).}$$

$$f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+4f(x_{i+1})-3f(x_i)}{2h} \qquad O(h^2) \text{ (Segundo orden).}$$

Segunda derivada:

$$f''(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^2} \qquad O(h)$$

$$f''(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+4f(x_{i+2})-5f(x_{i+1})+2f(x_i)}{h^2} \qquad O(h^2)$$

Tercera derivada:

$$f'''(x_i)=\frac{f(x_{i+3})-3f(x_{i+2})+3f(x_{i+1})-f(x_i)}{h^3} \qquad O(h)$$

$$f'''(x_i)=\frac{-3f(x_{i+4})+14f(x_{i+3})-24f(x_{i+2})+18f(x_{i+1})-5f(x_i)}{2h^3} \qquad O(h^2)$$

Cuarta derivada:

$$f''''(x_i)=\frac{f(x_{i+4})-4f(x_{i+3})+6f(x_{i+2})-4f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^4} \qquad O(h)$$

$$f''''(x_i)=\frac{-2f(x_{i+5})+11f(x_{i+4})-24f(x_{i+3})+26f(x_{i+2})-14f(x_{i+1})+3f(x_i)}{h^4}$$

Diferencias divididas finitas centradas.

Primera derivada:

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h} \qquad O(h^2)$$

$$f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+8f(x_{i+1})-8f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{12h} \qquad O(h^4)$$

Segunda derivada:

$$f''(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2} \qquad O(h^2)$$

$$f''(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+16f(x_{i+1})-30f(x_i)+16f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{12h^2} \qquad O(h^4)$$

Tercera derivada:

$$f'''(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+2f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{2h^3} \qquad O(h^2)$$

$$f'''(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+8f(x_{i+2})-13f(x_{i+1})+13f(x_{i-1})-8f(x_{i-2})+f(x_{i-3})}{8h^3} \qquad O(h^4)$$

Cuarta derivada:

$$f''''(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-4f(x_{i+1})+6f(x_i)-4f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^4} \qquad O(h^2)$$

$$f''''(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+12f(x_{i+2})+39f(x_{i+1})+56f(x_i)-39f(x_{i-1})+12f(x_{i-2})+f(x_{i-3})}{6h^4}$$

Diferencias divididas finitas hacia atrás.

Primera derivada:

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h} \qquad O(h)$$

$$f'(x_i)=\frac{3f(x_i)-4f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{2h} \qquad O(h^2)$$

Segunda derivada:

$$f''(x_i)=\frac{f(x_i)-2f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^2} \qquad O(h)$$

$$f''(x_i)=\frac{2f(x_i)-5f(x_{i-1})+4f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{h^2} \qquad O(h^2)$$

Tercera derivada:

$$f'''(x_i)=\frac{f(x_i)-3f(x_{i-1})+3f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{h^3} \qquad O(h)$$

$$f'''(x_i)=\frac{5f(x_i)-18f(x_{i-1})+24f(x_{i-2})-14f(x_{i-3})+3f(x_{i-4})}{2h^3} \qquad O(h^2)$$

Cuarta derivada:

$$f''''(x_i)=\frac{f(x_i)-4f(x_{i-1})+6f(x_{i-2})-4f(x_{i-3})+f(x_{i-4})}{h^4} \qquad O(h)$$

$$f''''(x_i)=\frac{3f(x_i)-14f(x_{i-1})+26f(x_{i-2})-24f(x_{i-3})+11f(x_{i-4})-2f(x_{i-5})}{h^4} \qquad O(h^2)$$

Derivadas de datos irregularmente espaciados.

$$f'(x)=f(x_{i-1})\frac{2x-x_i-x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}+f(x_i)\frac{2x-x_{i-1}-x_{i+1}}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}+f(x_{i+1})\frac{2x-x_{i-1}-x_i}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}$$

II. INTEGRACIÓN NUMÉRICA.

La regla del trapecio.

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

La regla del trapecio de aplicación múltiple.

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)}{2n}$$

$$h=\frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)]$$

$x_0 = a$
$x_i = a + i\,h$
$x_n = b$

Reglas de Simpson.

Regla de Simpson 1/3.

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$$

$x_0 = a$

$$x_1=\frac{a+b}{2}$$

$x_2 = b$.

Regla de Simpson 1/3 de aplicación múltiple (*n* par).

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(x_0)+4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i)+f(x_n)}{3n}$$

$$h=\frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i)+f(x_n)]$$

$x_0 = a$
$x_i = a + i\,h$
$x_n = b$

Regla de Simpson 3/8.

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}$$

$$h=\frac{b-a}{3}$$

$x_0 = a$
$x_1 = a + h$
$x_2 = a + 2\,h$
$x_3 = b$

La regla de 3/8 es útil cuando el número de segmentos es impar. Se aplica la regla de Simpson 1/3 para los $n-3$ segmentos y la regla de Simpson 3/8 para los últimos tres segmentos.
Al construir la tabla de valores de la función, se debe repetir el valor x_{n-3} en dos filas consecutivas. Uno, es el correspondiente al límite superior de la primera integral (Simpson 1/3) y el otro el correspondiente al límite inferior de la segunda integral (Simpson 3/8).

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{x_{n-3}} f(x)\,dx}_{\text{Simpson1/3}} + \underbrace{\int_{x_{n-3}}^b f(x)\,dx}_{\text{Simpson3/8}}$$

Adicionalmente, en este caso debe tenerse en cuenta que el número de segmentos para la aplicación de la fórmula de la Regla de Simpson 1/3 es el número dado restado en 3 unidades.

Integración con segmentos desiguales.

Se aplica la regla del trapecio a cada segmento y se suman los resultados. Cuando se identifican 2 intervalos igualmente espaciados, aplicar la regla de Simpson 1/3 y si se tienen 3 intervalos igualmente espaciados, aplicar la regla de Simpson 3/8.

Extrapolación de Richardson.

Para derivadas:

$$D = D(h_2)+\frac{1}{(h_2/h_1)^2-1}[D(h_2)-D(h_1)] \qquad h_2<h_1$$

Para integrales:

$$I = I(h_2)+\frac{1}{(h_2/h_1)^2-1}[I(h_2)-I(h_1)]$$

En el caso que $h_2=\frac{h_1}{2}$:

Para derivadas:

$$D=\tfrac{4}{3}D(h_2)-\tfrac{1}{3}D(h_1)$$

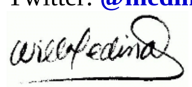
Para integrales:

$$I=\tfrac{4}{3}I(h_2)-\tfrac{1}{3}I(h_1)$$

Recomendaciones.

1.- Disponer de una calculadora científica que permita:
a) Evaluar una función en un punto, b) Evaluar la derivada de la función en un punto y c) Calcular el valor de una integral en un intervalo dado.
2.- Verificar que la calculadora se encuentre en el modo radián si se efectúan cálculos que involucren funciones trigonométricas.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
https://www.tutoruniversitario.com/ Puerto La Cruz, abril de 2026