

SERIES DE POTENCIAS.

1.- Serie de Taylor.

Si una función f admite un desarrollo en serie de potencias

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$$

Entonces se dice que la función es analítica en c , los coeficientes vienen dados por $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ y

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

2.- Serie de McLaurin.

Si la serie está centrada en $x=0$, entonces se denomina serie de McLaurin.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

3.- Serie de potencias de funciones básicas elementales.

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - \dots + (-1)^n(x-1)^n + \dots \quad 0 < x < 2$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \dots \quad 0 < x \leq 2$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots - \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$\ln(x-1) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.4.5} + \frac{x^7}{2.4.6.7} + \frac{x^9}{2.4.6.8.9} + \dots + \frac{(2n)! x^{2n+1}}{(2^n n!)^2 (2n+1)} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)x^4}{4!} + \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^{-k} = 1 - kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} - \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)x^4}{4!} + \dots, \quad -1 < x < 1$$

4.- Serie geométrica.

4.1- Definición de serie geométrica.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \dots + \dots$ ($a \neq 0$) se denomina serie geométrica de razón r .

4.2.- Convergencia de una serie geométrica.

Las series geométricas $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \dots + \dots$ verifican:

1.- Si $|r| \geq 1$, *divergen*.

2.- Si $|r| < 1$, *convergen* y tienen por suma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$, donde “ a ” es el primer término de la serie.

5.- Series armónicas.

5.1- Definición de series armónicas.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$ se denomina serie armónica de orden p .

5.2.- Convergencia de una serie armónica de orden p .

Las series armónicas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$ verifican:

1.- Si $0 < p \leq 1$, *diverge*.

2.- Si $p > 1$, *converge*.

6.- Criterios de convergencia de series.

6.1.- Criterio del término enésimo para la divergencia.

Dada una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. De forma equivalente, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$,

entonces la serie *diverge*.

6.2.- Criterio del cociente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

1.- Converge si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

2.- Diverge si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$

3.- Criterio no concluyente: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$

6.3.- Criterio de la raíz.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1.- Converge si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

2.- Diverge si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

3.- Criterio no concluyente: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

6.4.- Criterio integral.

Si f es continua, positiva y decreciente para $n \geq 1$ y si $a_n = f(n)$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\int_1^{\infty} f(n) dn$

convergen o divergen simultáneamente.

Nota: $\int_1^{\infty} f(n) dn = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(n) dn$

6.5.- Criterio de comparación en el límite.

Dados a_n y $b_n > 0$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = L > 0$ entonces las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o convergen

ambas o divergen ambas.

6.6.- Criterio de las series alternadas.

La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ converge si:

1.- $0 < a_{n+1} \leq a_n$ para $n \geq 1$, y

2.- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

6.7.- Convergencia absoluta.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

7.- Convergencia de una serie de potencias.

Dada una serie de potencias centrada en c , se verifica una de las tres siguientes opciones:

1.- La serie sólo converge en $x = c$.

2.- La serie converge para todo x ($|x - c| < \infty$).

3.- Existe un $R > 0$ tal que la serie converge para $|x - c| < R$ y diverge para $|x - c| > R$.

donde R se denomina radio de convergencia y el intervalo que se obtiene es el intervalo de convergencia.

8.- Criterio del cociente para series de potencias. Radio de convergencia de una serie.

Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ ($0 \leq L < \infty$) entonces el *radio de convergencia* de la serie es R , donde $R = 0$ si $L = \infty$ y $R = \infty$ si $L = 0$.

9.- Puntos ordinarios y puntos singulares.

El caso en que la ecuación diferencial $a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$ tiene coeficientes polinomiales y *no tienen factores comunes*, un punto $x = x_0$ es:

1.- Un punto ordinario si $a_2(x_0) \neq 0$.

2.- Un punto singular si $a_2(x_0) = 0$.

10.- Solución de ecuaciones diferenciales en torno a puntos ordinarios.

Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación $a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$, siempre podemos encontrar dos soluciones distintas en serie de potencias, soluciones que son de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Una solución en serie converge por lo menos para $|x - x_0| < R_1$, donde R_1 es la distancia al punto singular más cercano.

Las derivadas involucradas son:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2}$$

Si $x_0 = 0$, se tiene: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

11.- Puntos singulares regulares e irregulares.

En el caso que los coeficientes de $a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$ son polinomios sin factores comunes, se tiene lo siguiente:

Sea $a_2(x_0) = 0$. Obtenga $P(x)$ y $Q(x)$ simplificando $a_1(x) / a_2(x)$ y $a_0(x) / a_2(x)$, respectivamente, hasta que éstas sean fracciones racionales irreducibles.

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$$

$$Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

Si el factor $(x - x_0)$ es *a lo más* de primer grado en el denominador de $P(x)$ y *a lo más* de segundo grado en el denominador de $Q(x)$, entonces $x = x_0$ es un punto singular regular.

12.- Solución de ecuaciones diferenciales en torno a puntos singulares regulares (Método de Frobenius).

Si $x = x_0$ es un punto singular regular de la ecuación $a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$, existe al menos una solución en serie de la forma

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r}$$

donde el número r es una constante a determinar. La serie convergerá al menos en algún intervalo $0 < x - x_0 < R$.

13.- Ecuación indicial.

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

$$p_0 = x P(x) \Big|_{x=0}; \quad p_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) P(x)$$

$$q_0 = x^2 Q(x) \Big|_{x=0}; \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 Q(x)$$

13.1.- Casos de raíces indiciales.

Al usar el método de Frobenius, se suelen distinguir tres casos de acuerdo con la naturaleza de las raíces indiciales. Para simplificar, supongamos que r_1 y r_2 son las soluciones *reales* de la ecuación indicial y que, cuando corresponda, r_1 denote *la mayor de las raíces*.

i.- Caso I. Raíces que no difieren en un entero.

Si r_1 y r_2 son distintas y *no* difieren en un entero, existen dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$ y son de la forma

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}, \quad a_0 \neq 0 \quad y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, \quad b_0 \neq 0$$

ii.- Caso II. Raíces que difieren en un entero positivo.

Si $r_1 - r_2 = N$, donde N es un entero positivo, existen dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$ de la forma

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}, \quad a_0 \neq 0 \quad y_2 = C y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, \quad b_0 \neq 0$$

donde C es una constante que puede ser cero.

iii.- Caso III. Raíces indiciales iguales.

Si $r_1 = r_2$, siempre existen dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$, de la forma

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}, \quad a_0 \neq 0 \quad y_2 = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r_1}, \quad b_0 \neq 0$$

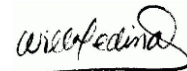
Nota: Sin pérdida de generalidad, hacer $a_0 = b_0 = 1$.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina.**

Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**

e-mail: **medinawj@gmail.com**

Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:

<https://www.tutoruniversitario.com/>

Puerto La Cruz, abril de 2026