

**1.- Ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.**

La ecuación diferencial  $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = F(x)$  recibe el nombre de ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. Si  $F(x) = 0$ , la ecuación es homogénea; en caso contrario es no homogénea.

**2.- Independencia lineal.**

Se dice que las funciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , son linealmente independientes si la *única* solución de la ecuación  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0$  es  $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ . Un conjunto de funciones que no son linealmente independientes se denomina linealmente dependiente.

**3.- El Wronskiano.**

**3.1.- Definición de Wronskiano.**

Se define el Wronskiano  $w(y_1, y_2, \dots, y_n)$  de un conjunto de  $n$  funciones como el determinante

$$w(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

**3.2.- Criterio del Wronskiano para dependencia lineal.**

Sean  $y_1, y_2, \dots, y_n$  soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden  $n$ .

i.- Si  $w(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ , las funciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , son *linealmente independientes* por lo menos en algún punto del intervalo.

ii.- Si  $w(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ , las funciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , son *linealmente dependientes* para todo punto del intervalo.

**4.- Solución general de una ecuación lineal homogénea (Principio de superposición).**

Si  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son soluciones independientes de la ecuación diferencial  $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$  entonces la solución general está dada por  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$  siendo  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , constantes arbitrarias.

**5.- Método de reducción de orden.**

Para resolver  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$  dada una solución conocida  $y_1(x)$ , una segunda solución se obtiene a partir de  $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$  (Teorema de Abel).

**6.- Ecuación característica.**

En general, para resolver una ecuación diferencial de orden  $n$   $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$  en donde los  $a_i$ , siendo  $i = 0, 1, \dots, n$ , son constantes reales, se toma el operador  $(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) y = 0$ , cambiar "D" por "m" y se debe resolver una ecuación polinomial de grado  $n$ :  $a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$ . Esta última ecuación se llama ecuación auxiliar o ecuación característica de la ecuación diferencial.

**7.- Soluciones generales de  $y'' + a y' + b y = 0$ .**

**i.- Caso I (Raíces reales diferentes):**

Si  $m_1 \neq m_2$  son raíces diferentes de la ecuación característica, la solución general es entonces  $y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$ .

**ii.- Caso II (Raíces reales iguales):**

Si  $m_1 = m_2$  son raíces iguales de la ecuación característica, entonces la solución general es  $y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x} = (C_1 + C_2 x) e^{m_1 x}$ .

**iii.- Caso III (Raíces complejas):**

Si  $m_1 = \alpha + \beta i$  y  $m_2 = \alpha - \beta i$  son raíces complejas de la ecuación característica, entonces la solución general es  $y = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ .

**8.- Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes no homogéneas.**

**8.1- Solución general de una ecuación lineal no homogénea.**

Sea  $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = F(x)$  una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ . Si  $y_p$  es una solución particular de esta ecuación no homogénea y  $y_h$  la solución general de la correspondiente ecuación homogénea, entonces  $y = y_h + y_p$  es la solución general de la ecuación no homogénea.

**8.2.- Método de los coeficientes indeterminados (Familia).**

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = F(x)$

i.- Obtener  $y_h$ , solución general de la ecuación homogénea que resulta de hacer  $F(x) = 0$ .

ii.- Utilizar  $F(x)$  para determinar la forma de la solución particular  $y_p$ . Véase la tabla siguiente:

Término en $F(x)$	Términos correspondientes en $y_p$
$C$ (Constante)	$A$
$a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k$	$A_0 + A_1 x + \dots + A_{k-1} x^{k-1} + A_k x^k$
$C e^{m x}$	$A e^{m x}$
$C x^k e^{m x}$	$(A_0 + A_1 x + \dots + A_{k-1} x^{k-1} + A_k x^k) e^{m x}$
$C \cos \beta x$ ó $C \sen \beta x$	$A \cos \beta x + B \sen \beta x$
$(a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k) \cos \beta x$ $(a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k) \sen \beta x$	$(A_0 + \dots + A_k x^k) (A \cos \beta x + B \sen \beta x)$
$C e^{m x} \cos \beta x$ ó $C e^{m x} \sen \beta x$	$e^{m x} (A \cos \beta x + B \sen \beta x)$

iii.- Si un término de  $y_p$  coincide con un término de  $y_h$ , multiplicar el término en  $y_p$  por la mínima potencia de  $x$  que evita la duplicación.

iv.- Sustituir  $y_p$  y sus derivadas en la ecuación no homogénea y despejar los coeficientes.

v.- Formar la solución general  $y = y_h + y_p$ .

**8.3.- Operadores Diferenciales.**

Término en $F(x)$	Operador anulador.
$C$ (Constante)	$D$
$a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k$	$D^{k+1}$
$C e^{\alpha x}$	$D - \alpha$
$(a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k) e^{\alpha x}$	$(D - \alpha)^{k+1}$
$C \cos \beta x$ ó $C \sen \beta x$	$D^2 + \beta^2$
$(a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k) \cos \beta x$ $(a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k) \sen \beta x$	$(D^2 + \beta^2)^{k+1}$
$C e^{\alpha x} \cos \beta x$ ó $C e^{\alpha x} \sen \beta x$	$D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)$
$(a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k) e^{\alpha x} \cos \beta x$ $(a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k) e^{\alpha x} \sen \beta x$	$[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^{k+1}$

**8.4.- Método de variación de los parámetros.**

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = F(x)$ .

Métodos de solución.

Primer método.

i.- Hallar la solución general  $y_h$  de la ecuación homogénea:  $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$

ii.- Reemplazar las constantes de  $y_h$  por variables, a fin de obtener  $y_p$ :  $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \dots + v_n y_n$ .

iii.- Resolver el siguiente sistema, despejando las variables  $v_1', v_2', \dots, v_n'$ :

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 + \dots + v_n' y_n = 0$$

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' + \dots + v_n' y_n' = 0$$

$$v_1' y_1'' + v_2' y_2'' + \dots + v_n' y_n'' = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \dots + v_n' y_n^{(n-1)} = F(x)$$

iv.- Integrar para hallar  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

v.- Formar la solución general:  $y = y_h + y_p$ .

La solución del sistema de ecuaciones para ecuaciones diferenciales de segundo y tercer orden es:

**Segundo orden.**

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ F(x) & y_2' \end{vmatrix}}{w(y_1, y_2, \dots, y_n)}; v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & F(x) \end{vmatrix}}{w(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

**Tercer orden.**

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ F(x) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}}{w(y_1, y_2, \dots, y_n)}; v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & F(x) & y_3'' \end{vmatrix}}{w(y_1, y_2, \dots, y_n)}; v_3' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & F(x) \end{vmatrix}}{w(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

Segundo método.

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^n y_k \int \frac{w_k(x) F(x)}{w(y_1, y_2, \dots, y_n)} dx, \quad w_k = (-1)^{n-k} w(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

## 9.- Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables.

### 9.1- Ecuación de Cauchy – Euler.

Una ecuación diferencial de la forma  $a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = F(x)$  en

donde  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  son constantes, se llama ecuación de Cauchy-Euler o ecuación equidimensional.

La característica obvia de este tipo de ecuación es que el grado de los coeficientes polinomiales  $x^k$  es

igual al orden de derivación en los términos  $\frac{d^k y}{dx^k}$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Para precisar el estudio, fijaremos nuestra atención sobre la resolución de la ecuación homogénea de

$$\text{segundo orden } ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0.$$

La solución de ecuaciones de orden superior se encuentra de forma análoga. Además, podemos resolver

la ecuación no homogénea  $ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = F(x)$  mediante variación de parámetros, una vez

que hayamos determinado la función complementaria  $y_h(x)$ . Al resolver

$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = F(x)$  mediante el método de variación de parámetros, se debe escribir la

$$\text{ecuación en la forma } \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{b}{ax} \frac{dy}{dx} + \frac{c}{ax^2} y = \hat{F}(x), \text{ donde } \hat{F}(x) = \frac{F(x)}{ax^2}$$

### 9.2.- Método de solución.

Probamos una solución de la forma  $y = x^m$ , donde  $m$  debe ser determinada. Las derivadas de la función  $y = x^m$  son:

$$y' = mx^{m-1}, y'' = m(m-1)x^{m-2} = (m^2 - m)x^{m-2}, y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3} = (m^3 - 3m^2 + 2m)x^{m-3}$$

$y = x^m$  será solución de la ecuación diferencial cada vez que  $m$  sea solución de la **ecuación auxiliar**

$$am(m-1) + bm + c = 0 \text{ o bien } am^2 + (b-a)m + c = 0.$$

Hay que considerar tres casos diferentes dependiendo de si las raíces de esta ecuación cuadrática son reales y distintas, reales e iguales, o complejas conjugadas.

#### i.- Caso I (Raíces reales diferentes):

Si  $m_1 \neq m_2$  son raíces diferentes de la ecuación característica, la solución general es entonces

$$y = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}.$$

#### ii.- Caso II (Raíces reales iguales):

Si  $m_1 = m_2$  son raíces iguales de la ecuación característica, entonces la solución general es

$$y = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_1} \ln x = (C_1 + C_2 \ln x) x^{m_1}.$$

#### iii.- Caso III (Raíces complejas):

Si  $m_1 = \alpha + \beta i$  y  $m_2 = \alpha - \beta i$  son raíces complejas de la ecuación característica, entonces la solución general es

$$y = x^\alpha [C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x)].$$

Para una ecuación de tercer orden  $ax^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + bx^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + cx \frac{dy}{dx} + ky = 0$ , la ecuación auxiliar es

$$am^3 + (b-3a)m^2 + (2a+c-b)m + k = 0.$$

### 9.3.- Cambio de variable.

La sustitución  $x = e^t$  permite convertir la ecuación diferencial de Cauchy-Euler

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \text{ en una ecuación diferencial lineal homogénea de}$$

coeficientes constantes.

Las tres primeras derivadas requeridas son:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right), \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = e^{-3t} \left( \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right)$$

Si la ecuación diferencial es de la forma

$$(ax+b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + (ax+b)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + (ax+b) \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

El cambio de variable correspondiente es  $ax+b = e^t$ . Las tres primeras derivadas requeridas son:

$$\frac{dy}{dx} = a e^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right), \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = a^3 e^{-3t} \left( \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right)$$

### 10.- Problema de valor inicial.

Un problema de valor inicial para una ecuación diferencial lineal de orden  $n$  es:

*Resolver:*  $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = F(x)$  *Sujeta a:*  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots,$

$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$  en donde  $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  son constantes arbitrarias.

### 11.- Problema de valores en la frontera.

Un problema como: *Resolver:*  $a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = F(x)$  *Sujeta a:*  $y(a) = y_0, y(b) = y_1$  se


llama problema de valores de frontera de dos puntos o, simplemente, un problema de valores de frontera.

Autor: **MSc. Ing. Williams Medina.**

Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**

e-mail: **medinawj@gmail.com**

Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:

<https://www.tutoruniversitario.com/>

Puerto La Cruz, abril de 2026.