

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN.

1.- Ecuación diferencial. Si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial.

2.- Tipos de ecuaciones diferenciales.

2.1.- Ecuación diferencial ordinaria: Si una ecuación contiene sólo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a **una sola variable independiente**, entonces se dice que es una ecuación diferencial ordinaria.

2.2.- Ecuación diferencial parcial: Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama ecuación diferencial parcial.

3.- Orden de una ecuación diferencial. El orden de la más alta derivada en una ecuación diferencial se llama orden de la ecuación.

4.- Grado de una ecuación diferencial. El grado de una ecuación diferencial es la potencia más alta a la que está elevada la derivada de mayor orden (siempre que la ecuación esté escrita en forma polinómica en cuanto a las derivadas y a la variable dependiente).

5.- Linealidad de una ecuación diferencial. Se dice que la ecuación diferencial es lineal si tiene la

$$\text{forma } a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = F(x)$$

Las ecuaciones diferenciales lineales se caracterizan por dos propiedades: a) la variable dependiente “y” junto con todas sus derivadas son de primer grado, esto es, la potencia de cada término en “y” y sus derivadas es 1; y b) cada coeficiente depende sólo de la variable independiente “x”. Una ecuación que no es lineal se dice no lineal.

6.- Solución de una ecuación diferencial. Se dice que una función f cualquiera, definida en algún intervalo I , es solución de una ecuación diferencial en el intervalo, si sustituida en dicha ecuación la reduce a una identidad.

6.1.- Solución trivial. A una solución de una ecuación diferencial que es idéntica a cero en un intervalo I , se le denomina a menudo solución trivial.

6.2.- Solución general. Una solución que contiene una o más constantes arbitrarias, se denomina solución general de una ecuación diferencial dada.

6.3.- Solución particular. Una solución particular de una ecuación diferencial es toda solución obtenida asignando valores específicos a las constantes que intervienen en la solución general (El valor de la constante se obtiene a través de condiciones iniciales).

6.4.- Solución singular. Solución que no es posible obtener a partir de la solución general asignando valores a las constantes arbitrarias.

6.5.- Solución explícita. Una solución explícita de una ecuación diferencial es una función de la forma $y = f(x)$ ó $x = f(y)$.

6.6.- Solución implícita. Se dice que una relación $F(x, y) = C$ (C es una constante arbitraria) define implícitamente una ecuación diferencial en un intervalo I , si define una o más soluciones explícitas en I .

7.- Variables separables. Se dice que una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$ es separable o

que tiene variables separables.

7.1.- Separación de variables. Se dice que una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ es

separable o que tiene variables separables si la función $F(x, y)$ se puede escribir como el producto de una función de “x” y una función de “y”. Es decir: $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$. Si la ecuación de primer orden

$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ puede escribirse con *variables separadas* en la forma diferencial $h(y) dy = g(x) dx$ siendo

h y g continuas, entonces la solución general es $\int h(y) dy = \int g(x) dx$ siendo C una constante arbitraria.

Una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$, $b \neq 0$, puede reducirse siempre a una

ecuación de variables separables por medio de la sustitución $u = ax + by + c$.

8.- Funciones homogéneas.

8.1.- Definición de función homogénea. Se dice que $f(x, y)$ es una función homogénea de grado n , si para algún número real n , $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

8.2.- Ecuaciones diferenciales homogéneas. Si una ecuación en la forma diferencial $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ tiene la propiedad que $M(tx, ty) = t^n M(x, y)$ y $N(tx, ty) = t^n N(x, y)$, se dice que tiene coeficientes homogéneos o que es una ecuación homogénea.

8.3.- Paso de una ecuación diferencial homogénea a una de variables separables.

1.- Si f es homogénea de grado cero, la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ puede ser transformada en una

ecuación cuyas variables son separables haciendo $u = \frac{y}{x}$. Tendremos $y = ux$ y $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$. La

ecuación diferencial se reduce a $\frac{dx}{x} + \frac{du}{u - f(u)} = 0$

2.- Si tanto M como N son homogéneas del mismo grado, la ecuación diferencial $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ puede transformarse en una ecuación cuyas variables son separables,

haciendo $u = \frac{y}{x}$. Se tendrá $y = ux$ y $dy = u dx + x du$. Si $M(x, y)$ es de estructura más simple que

$N(x, y)$ se ensaya $v = \frac{x}{y}$. Se tendrá $x = vy$ y $dx = v dy + y dv$.

Ecuaciones diferenciales con coeficientes lineales. Una ecuación diferencial de la forma

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right)$ ó $(ax + by + c) dx + (Ax + By + C) dy = 0$, $aB - bA \neq 0$, siempre puede ser

reducida a una ecuación homogénea mediante las sustituciones $x = u + h$, $y = v + k$, donde h y k son la solución del sistema de ecuaciones: $ax + by + c = 0$ $Ax + By + C = 0$

En cuanto al sistema de ecuaciones anterior, se presentan los siguientes casos:

- **Rectas coincidentes** (Se intersectan en todos sus puntos): $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$

Método de solución: Escribese la expresión $Ax + By + C$ como un múltiplo de $ax + by + c$ en la ecuación diferencial. Simplifique. La ecuación resultante es de variables separables en x y y .

- **Rectas paralelas** (No se intersectan): $\frac{a}{b} \neq \frac{A}{B}$

Método de solución: Tómese $u = ax + by$, con lo cual $du = a dx + b dy$. Escribese la ecuación diferencial en función de las dos variables x y u ó y y u . La ecuación resultante es de variables separables.

- **Rectas que se intersectan en el punto** (h, k) : $\frac{a}{b} \neq \frac{A}{B}$

Método de solución: Tómese $x = u + h$ y $y = v + k$, con lo cual $dx = du$ y $dy = dv$. Escribese la ecuación diferencial en función de las nuevas variables u y v . La ecuación resultante es homogénea.

9.- Diferenciales exactas.

9.1.- Ecuaciones diferenciales exactas. La ecuación diferencial $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ es exacta si existe una función $U(x, y)$ tal que la diferencial total de U está dada por

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

9.2.- Criterio de exactitud. La ecuación diferencial $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ es exacta si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

9.3.- Solución general de una ecuación exacta. Si la ecuación diferencial $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ es exacta, la solución general viene entonces dada por $U(x, y) = C$ siendo

$$U(x, y) = \int M(x, y) dx + f(y) \quad y \quad N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\int M(x, y) dx \right] = f'(y) \cdot \quad [\text{Adviértase que}$$

$\int M(x, y) dx$ denota integración parcial con respecto a x].

9.4.- Factores integrantes. Si la ecuación diferencial $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ no es exacta, puede ser posible convertirla en exacta multiplicándola por una función adecuada $F(x, y)$. Una tal función recibe el nombre de factor integrante de la ecuación diferencial.

9.5.- Factores integrantes que son función sólo de x , de y , de $x + y$ ó de $x \cdot y$. Sea la ecuación diferencial $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$.

- i.- Si $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \mu(x)$ entonces $e^{\int \mu(x) dx}$ es un factor integrante.
- ii.- Si $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \mu(y)$ entonces $e^{\int \mu(y) dy}$ es un factor integrante.
- iii.- Si $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M - N} = \mu(x + y)$ entonces $z = x + y$ y $e^{\int \mu(z) dz}$ es un factor integrante.
- iv.- Si $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M x - N y} = \mu(x, y)$ entonces $z = x y$ y $e^{\int \mu(z) dz}$ es un factor integrante.

9.6.- Trece diferenciales exactas usuales (Factores integrantes por inspección).

- i.- $y dx + x dy = d(xy)$
- ii.- $x^{m-1} y^{n-1} (m y dx + n x dy) = d(x^m y^n)$
- iii.- $\frac{x dy + y dx}{xy} = d[\ln(xy)]$
- iv.- $\frac{x dy + y dx}{(xy)^n} = d\left[\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right]$
- v.- $\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = d\left[\ln \sqrt{x^2 + y^2}\right]$
- vi.- $\frac{x dx + y dy}{(x^2 + y^2)^n} = d\left[\frac{-1}{2(n-1)(x^2 + y^2)^{n-1}}\right]$
- vii.- $\frac{x dy - y dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$
- viii.- $\frac{x dy - y dx}{xy} = d\left[\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right]$
- ix.- $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = d\left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]$
- x.- $\frac{y dx - x dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$
- xi.- $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d(\sqrt{x^2 + y^2})$
- xii.- $\frac{x dx - y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = d(\sqrt{x^2 - y^2})$
- xiii.- $\frac{y dx - x dy}{x^2 - y^2} = d\left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\right]$

9.7.- Otros factores integrantes.

- i.- Si $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ es homogénea y $M(x, y) dx + N(x, y) dy \neq 0$, entonces $\frac{1}{xM(x, y) + yN(x, y)}$ es un factor integrante.
- ii.- Si $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ se puede escribir en la forma $y f(x, y) dx + x g(x, y) dy = 0$, donde $f(x, y) \neq g(x, y)$, entonces $\frac{1}{xM(x, y) - yN(x, y)}$ es un factor integrante.

iii.- La ecuación $x^r y^s (m y dx + n x dy) + x^\rho y^\sigma (\mu y dx + \nu x dy) = 0$ donde $r, s, m, n, \rho, \sigma, \mu, \nu$ son constantes y $m\nu - n\rho \neq 0$ tiene un factor integrante de la forma $x^a y^b$. El método de solución consiste en determinar a y b .

10.- Ecuaciones diferenciales lineales.

10.1.- Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Una ecuación de la forma

$$A(x) \frac{dy}{dx} + B(x)y = C(x)$$

recibe el nombre de ecuación diferencial lineal de primer orden. La forma normal de esta ecuación es $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$. La ecuación diferencial $\frac{dx}{dy} + R(y)x = S(y)$ es

lineal en x .

10.2.- Solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden. La solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ viene dada por

$$y e^{\int P(x) dx} = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C$$

Métodos de solución.

a) **Método de Lagrange**, haciendo variar la constante "C" de la solución homogénea correspondiente de la ecuación diferencial inicial, es decir $y(x) = C(x) e^{-\int P(x) dx}$ y sustituirla en la ecuación diferencial inicial.

b) **Método de Bernoulli**, haciendo la sustitución de $y = u v$, donde "u" y "v" son dos funciones de "x" desconocidas.

$$u(x) = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C; \quad v(x) = e^{-\int P(x) dx}$$

11.- Ecuación de Bernoulli. Una ecuación no lineal muy conocida, que se reduce a una lineal por medio de una sustitución apropiada, es la ecuación de Bernoulli $y' + P(x)y = Q(x)y^n$. Nótese que esta ecuación es lineal si $n = 0$ y admite variables separadas si $n = 1$. La solución de la ecuación de Bernoulli es $y^{1-n} e^{\int (1-n)P(x) dx} = \int (1-n)Q(x) e^{\int (1-n)P(x) dx} dx + C$

12.- Sustituciones. Para una ecuación de la forma $y f(x, y) dx + x g(x, y) dy = 0$, la sustitución $x y = z, y = \frac{z}{x}, dy = \frac{x dz - z dx}{x^2}$ reduce una ecuación de este tipo a la forma $P(x, z) dx + Q(x, z) dz = 0$ en la que las variables son separables.

13.- Ecuación de Ricatti. Es una ecuación no lineal $\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$. Si y_1 es una

solución particular conocida de la ecuación de Ricatti, $y = y_1 + u$ es una familia de soluciones de dicha ecuación.

14.- Ecuación de Clairaut. La ecuación diferencial $y = x y' + f(y')$ se llama ecuación de Clairaut. Una solución de la ecuación de Clairaut es la familia de rectas $y = c x + f(c)$, en donde c es una constante arbitraria.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina.**

Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**

e-mail: **medinawj@gmail.com**

Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:

<https://www.tutoruniversitario.com/>

Puerto La Cruz, abril de 2026.