

INTEGRALES MÚLTIPLES.

1.- Definición de integral doble.

Dada una función f definida sobre una región R acotada en el plano x, y , entonces la integral doble de f sobre R se define como

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i$$

cuando tal límite existe.

2.- Propiedades de las integrales dobles.

Si f y g son continuas sobre la región acotada R del plano, entonces

$$1.- \iint_R c f(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA$$

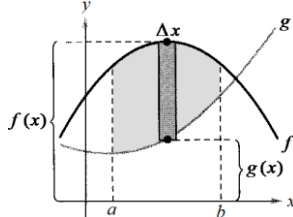
$$2.- \iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA \pm \iint_R g(x, y) dA$$

$$3.- \iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA \text{ donde } R_1 \text{ y } R_2 \text{ son una}$$

partición de R .

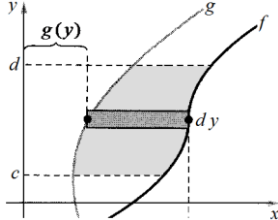
3.- Áreas en el plano mediante integrales iteradas.

Región limitada por $a \leq x \leq b$, $g(x) \leq y \leq f(x)$.



$$A = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} dy dx$$

Región limitada por $c \leq y \leq d$, $g(y) \leq x \leq f(y)$.



$$A = \int_c^d \int_{g(y)}^{f(y)} dx dy$$

4.- Área de una superficie.

Si f es diferenciable sobre una región R del plano x, y , entonces el área de la superficie $z = f(x, y)$, con base R , está dada por:

$$S = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA$$

5.- Centros de masa y momentos de inercia.

Sea $\rho(x, y)$ la densidad de una lámina que ocupa una región plana R , entonces la masa de la lámina viene dada por:

$$m = \iint_R \rho(x, y) dA$$

6.- Momentos y centro de masa de una lámina plana.

Sea $\rho(x, y)$ la densidad de una lámina que ocupa una región plana R . Entonces los momentos de la lámina respecto a los ejes x e y vienen determinados por:

$$M_x = \iint_R y \rho(x, y) dA$$

$$M_y = \iint_R x \rho(x, y) dA$$

Además, si m es la masa total de la lámina, el centro de masa es dado por

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right).$$

Los momentos M_x y M_y que aparecen al calcular el centro de masa se llaman a veces **momentos primeros** respecto a los ejes x e y , respectivamente

7.- Momentos de inercia.

Sea $\rho(x, y)$ la densidad de una lámina que ocupa una región plana R . Entonces los momentos de inercia respecto a los ejes x e y vienen determinados por:

$$I_x = \iint_R y^2 \rho(x, y) dA$$

$$I_y = \iint_R x^2 \rho(x, y) dA$$

8.- Momento polar de inercia.

El momento polar de inercia I_0 se define por:

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA$$

9.- Radio de giro.

Los momentos I_x e I_y determinan el radio de giro. Denominaremos \bar{x} el radio de giro de R respecto al eje y y \bar{y} el radio de giro de R respecto al eje x .

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{I_y}{m}} \text{ e } \bar{y} = \sqrt{\frac{I_x}{m}}$$

donde m denota la masa de la lámina en consideración.

10.- Definición de integral triple.

Si f es continua sobre una región sólida S , entonces la integral triple de f sobre S se define como

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

donde la diferencial dV representa cualquiera de las seis combinaciones

$$\begin{array}{ll} dx dy dz & dx dz dy \\ dy dx dz & dy dz dx \\ dz dx dy & dz dy dx \end{array}$$

11.- Momentos y centro de masa de un sólido.

Sea $\rho(x, y, z)$ la densidad de un sólido que ocupa una región sólida S . Entonces la masa del sólido es:

$$m = \iiint_S \rho(x, y, z) dV$$

y los momentos de la lámina respecto a los planos xz , xz y xy vienen determinados por:

$$M_{xz} = \iiint_S y \rho(x, y, z) dV$$

$$M_{yz} = \iiint_S x \rho(x, y, z) dV$$

$$M_{xy} = \iiint_S z \rho(x, y, z) dV$$

Además, si m es la masa total de la lámina, el centro de masa es dado por

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m} \right).$$

12.- Momentos de inercia.

Sea $\rho(x, y, z)$ la densidad de un sólido que ocupa una región sólida S . Entonces los momentos de inercia respecto a los ejes x , y y z vienen determinados por:

$$I_x = \iiint_S (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$$

$$I_y = \iiint_S (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$$

$$I_z = \iiint_S (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV$$

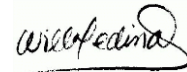
Para regiones sólidas los momentos primeros se toman respecto a planos, mientras que los momentos de inercia se toman respecto de rectas.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina.**

Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**

e-mail: **medinawj@gmail.com**

Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:

<https://www.tutoruniversitario.com/>

Puerto La Cruz, abril de 2026.