

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

1.- Definición de función de dos variables.

Si a cada par ordenado (x, y) de elementos de un cierto conjunto D le corresponde un número real $f(x, y)$, decimos que f es una **función de x y de y** . El conjunto D es el dominio de f y el conjunto correspondiente de valores $f(x, y)$ recibe el nombre de **recorrido** de f .

Una **función polinomial** de las variables x y y es una función f tal que $f(x, y)$ es la suma de términos de la forma $c x^n y^m$, donde c es un número real y n y m son números enteros no negativos. El **grado** de una función polinomial está determinado por la mayor suma de los exponentes de x y y que se tiene en los términos de la función.

2.- Dominio de una función de dos variables.

Restricciones en el dominio para cada tipo de funciones.

Nombre	Función	Dominio de la función
Polinomial	$a_0 + a_{11}x + a_{12}y + a_{21}x^2 y \dots$	\mathbb{R}^2
Racional	$\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$	$\text{Dom } P \cap \text{Dom } Q - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / Q(x, y) = 0\}$
Radical	$\sqrt[n]{f(x, y)}$	n es un número par: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) \geq 0\}$
Radical	$\sqrt[n]{f(x, y)}$	n es un número impar: $\text{Dom } f(x, y)$
Valor absoluto	$ f(x, y) $	$\text{Dom } f(x, y)$
Logarítmica	$\ln[f(x, y)]$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) > 0\}$
Exponencial	$e^{f(x, y)}$	$\text{Dom } f(x, y)$
Seno	$\text{sen}[f(x, y)]$	$\text{Dom } f(x, y)$
Coseno	$\text{cos}[f(x, y)]$	$\text{Dom } f(x, y)$
Tangente	$\text{tan}[f(x, y)]$	$\mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = \frac{1}{2}(2n+1)\pi\}$
Arcoseno	$\text{sen}^{-1}[f(x, y)]$	$-1 \leq f(x, y) \leq 1$
Arcocoseno	$\text{cos}^{-1}[f(x, y)]$	$-1 \leq f(x, y) \leq 1$
Arcotangente	$\text{tan}^{-1}[f(x, y)]$	$\text{Dom } f(x, y)$

3.- Definición de límite de una función de dos variables.

Sea f una función de dos variables, definida [con la posible excepción del punto (a, b)] en el interior de un círculo centrado en (a, b) . Entonces se tendrá $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$ si y sólo si a

cada $\varepsilon > 0$ corresponde un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

4.- Definición de continuidad de una función de dos variables.

Una función f de dos variables es **continua en (a, b)** si $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$. Si D es un

subconjunto del dominio de f , diremos que f es continua en D si f es continua en cada punto (a, b) de D .

5.- Definición de derivada parcial.

Si $z = f(x, y)$, entonces las **derivadas parciales de primer orden de f con respecto a x y a y** son las funciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

6.- Notaciones (derivadas parciales de primer orden).

Si $z = f(x, y)$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y)$ y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y)$$

Las derivadas parciales de primer orden calculadas en el punto (a, b) se denotan por

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a, b)} \quad \text{ó bien } f_x(a, b) \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a, b)} \quad \text{ó bien } f_y(a, b)$$

7.- Definición de diferencial total.

Sea $z = f(x, y)$. Si existen ambas derivadas parciales de primero orden de z , se define la **diferencial total** dz como $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

8. Incrementos y diferenciales. Aproximación lineal.

Si $w = f(x, y, z)$, entonces el incremento Δf está dado por $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$, de donde:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = f(x, y, z) + \Delta f$$

Cuando $|\Delta x|, |\Delta y|, |\Delta z|$ son suficientemente pequeños, se verifica la igualdad aproximada

$$\Delta f \approx df, \text{ o sea } \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$$

9.- Regla de la cadena.

9.1.- Una sola variable independiente.

Sea $w = f(x, y)$ función diferenciable de x e y , siendo $x = g(t)$ e $y = h(t)$ funciones diferenciables de t . La función w es entonces función de t , y se tiene $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}$

9.2.- Dos variables independientes.

Sea $w = f(x, y)$ función diferenciable de x e y , con $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ funciones diferenciables de s y t . La función w es de forma indirecta función de s y t , y se tendrá

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

10.- Obtención implícita de derivadas y derivadas parciales.

i.- Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define y implícitamente como función de x , se tendrá

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \quad (F_y \neq 0)$$

ii.- Si la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define z implícitamente como función diferenciable de x e y ,

$$\text{entonces } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \text{ y } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \quad (F_z \neq 0).$$

Este teorema puede extenderse a funciones diferenciables definidas implícitamente y con un número arbitrario de variables.

11.- Gradiente.

11.1.- Definición de gradiente de una función de dos variables.

Si f es una función de las dos variables x y y , y f_x y f_y existen, entonces el **gradiente** de f , denotado por ∇f , está definido por el vector $\nabla f = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$.

11.2.- Definición de gradiente de una función de tres variables.

Si f es una función de las tres variables x, y y z , y las tres primeras derivadas parciales f_x, f_y y f_z existen, entonces el **gradiente** de f , denotado por ∇f , está definido por el vector $\nabla f = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$.

12.- Derivada direccional.

12.1.- Definición de derivada direccional.

Sea f una función de dos variables x e y . La **derivada direccional de f en la dirección θ** , denotada $D_{\theta}f$, es $D_{\theta}f = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta s \cos \theta, y + \Delta s \sin \theta) - f(x, y)}{\Delta s}$.

12.2.- Fórmula de la derivada direccional.

Sea f una función diferenciable de x e y . La derivada direccional de f en la dirección θ es $D_{\theta}f = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$, siendo θ el ángulo que forma el vector unitario $\mathbf{U} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ con el eje x positivo.
Sea f una función de tres variables x, y y z . La derivada direccional de f en la dirección de \mathbf{U} está dada por $D_{\mathbf{U}}f = f_x(x, y, z) \cos \alpha + f_y(x, y, z) \cos \beta + f_z(x, y, z) \cos \gamma$, siendo $\mathbf{U} = (\cos \alpha) \mathbf{i} + (\cos \beta) \mathbf{j} + (\cos \gamma) \mathbf{k}$ un vector unitario.

13.- Derivada direccional en función del gradiente.

Si f es una función de x e y y ∇f es el gradiente de f , la derivada direccional de f en la dirección \mathbf{U} está dada por $D_{\mathbf{U}}f = \nabla f \cdot \mathbf{U}$, siendo \mathbf{U} un vector unitario.
Si la dirección está dada por una curva $\mathbf{r}(t)$, entonces $D_{\mathbf{U}}f = \nabla f \cdot \mathbf{T}$, siendo \mathbf{T} el vector tangente unitario.

14.- Aplicaciones de ∇f .

El gradiente de f , evaluado en el punto (x_0, y_0, z_0) tiene las siguientes propiedades:
i.- ∇f posee la dirección de máximo aumento de f en (x_0, y_0, z_0) .
ii.- $\|\nabla f\|$ es el valor máximo de la derivada direccional en (x_0, y_0, z_0) .
iii.- ∇f es un vector perpendicular a la superficie en (x_0, y_0, z_0) .

15.- Plano tangente y recta normal a una superficie.

Siendo que ∇f es un vector perpendicular a la superficie, entonces el vector normal del plano tangente y el vector director de la recta normal son paralelos a ∇f .

1.- Si $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) , entonces el plano tangente y la recta normal a f en (x_0, y_0, z_0) están dados por

Plano tangente: $f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$

Recta normal: $\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$

2.- Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) , el plano tangente y la recta normal a F en (x_0, y_0, z_0) están dados por

Plano tangente: $f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$

Recta normal: $\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{f_z(x_0, y_0, z_0)}$

16.- Superficies tangentes.

Se dice que dos superficies $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ son tangentes en un punto de intersección (x_0, y_0, z_0) si tienen un plano tangente común en dicho punto. En la práctica, dos superficies son tangentes entre sí en un punto de intersección (x_0, y_0, z_0) si los vectores ∇f y ∇g son paralelos en ese punto.

17. Ángulo entre dos superficies. Si el punto (x_0, y_0, z_0) es un punto común a dos superficies $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$, entonces el ángulo entre dichas superficies en el punto de intersección es el ángulo entre sus vectores gradiente.

$$\cos \theta = \frac{\nabla f \cdot \nabla g}{\|\nabla f\| \|\nabla g\|}$$

18. Vector tangente unitario a una curva de intersección de dos superficies.

Si la curva $\mathbf{r}(t)$ es la curva de intersección de dos superficies, entonces el vector tangente a dicha curva es el producto vectorial de los gradientes de las dos superficies que se intersecan evaluados en el punto (x_0, y_0, z_0) .

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\nabla f \times \nabla g}{\|\nabla f \times \nabla g\|}$$

19.- Teorema de los valores extremos.

Sea f una función de dos variables x e y , definida y continua en una región cerrada R del plano xy . Se tiene:

- i.- Existe al menos un punto de R en el que f toma un valor mínimo.
- ii.- Existe al menos un punto de R en el que f toma un valor máximo.

20.- Definición de extremos locales.

Sea f una función definida en (x_0, y_0) . El valor $f(x_0, y_0)$ se denomina:
8.1.- **Máximo relativo** de f si existe una región circular R que contenga el punto (x_0, y_0) y tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ para todo punto (x, y) de R .
8.2.- **Mínimo relativo** de f si existe una región circular R que contenga el punto (x_0, y_0) y tal que $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ para todo punto (x, y) de R .

21.- Criterio de las derivadas parciales de primer orden.

Si $f(x_0, y_0)$ es un extremo de f en una región abierta R del plano xy , y existen las primeras derivadas parciales de f en R , entonces se tiene $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$.

22.- Definición de punto crítico.

Un punto (x_0, y_0) en el que $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ se denomina punto crítico de f .

23.- Criterio de las derivadas parciales de segundo orden.

Sea f una función de dos variables que posee derivadas continuas de primer y segundo orden en una región abierta R . Supongamos además que $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ en algún punto (a, b) de R . Sea $D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$.

- i.- $f(a, b)$ es un **mínimo** local de f si $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$ (ó $f_{yy}(a, b) > 0$).
- ii.- $f(a, b)$ es un **máximo** local de f si $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$ (ó $f_{yy}(a, b) < 0$).
- iii.- $(a, b, f(a, b))$ es un punto de ensilladura si $D(a, b) < 0$.

La expresión para $D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$ es el determinante

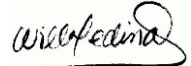
$$D(a, b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}, \text{ denominado } \mathbf{hessiano} \text{ (o } \mathbf{discriminante}) \text{ de la función } f.$$

24.- Método de los multiplicadores de Lagrange.

Para hallar los extremos locales de $f(x, y, z)$, sujeta a la ligadura $g(x, y, z) = 0$, calcular los valores críticos de la nueva función F definida por $f(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$. La variable λ se denomina un **multiplicador de Lagrange**.

En la práctica, la ecuación $\nabla f = \lambda \nabla g$ conduce a un sistema de ecuaciones que conducen a determinar el extremo de la función $f(x, y, z)$, sujeta a la ligadura $g(x, y, z) = 0$.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**
Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
<https://www.tutoruniversitario.com/>
Puerto La Cruz, abril de 2026.