

FUNCIONES VECTORIALES.

1.- Definición de función vectorial.

Si $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son funciones reales de t , entonces la función \mathbf{r} definida por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ se denomina función vectorial de t . Algunas veces, las funciones vectoriales se denotan como $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$.

2.- Dominio de una función vectorial.

Sea r una función vectorial definida por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$. Entonces su dominio está dado por $\text{Dom } \mathbf{r}(t) = \text{Dom } f(t) \cap \text{Dom } g(t) \cap \text{Dom } h(t)$.

Restricciones en el dominio para cada tipo de funciones.

Nombre	Función	Dominio de la función
Polinomial	$a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots$	R
Racional	$\frac{P(t)}{Q(t)}$	$R - \{t \in R / Q(t) = 0\}$
Radical	$\sqrt[n]{f(t)}$	n es un número par: $\{t \in R / f(t) \geq 0\}$
Radical	$\sqrt[n]{f(t)}$	n es un número impar: $\text{Dom } f(t)$
Valor absoluto	$ f(t) $	$\text{Dom } f(t)$
Logarítmica	$\ln [f(t)]$	$\{t \in R / f(t) > 0\}$
Exponencial	$e^{f(t)}$	$\text{Dom } f(t)$
Seno	$\text{sen } [f(t)]$	$\text{Dom } f(t)$
Coseno	$\text{cos } [f(t)]$	$\text{Dom } f(t)$
Tangente	$\text{tan } [f(t)]$	$R - \{t \in R / f(t) = \frac{1}{2}(2n+1)\pi\}$
Arcoseno	$\text{sen}^{-1} [f(t)]$	$\{t \in R / -1 \leq f(t) \leq 1\}$
Arcocoseno	$\text{cos}^{-1} [f(t)]$	$\{t \in R / -1 \leq f(t) \leq 1\}$
Arcotangente	$\text{tan}^{-1} [f(t)]$	$\text{Dom } f(t)$

3.- Definición de límite de una función vectorial.

Sea \mathbf{r} una función vectorial definida por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) \right] \mathbf{j} + \left[\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) \right] \mathbf{k} \quad \text{siempre que existan} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f(t), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} h(t)$$

4.- Definición de continuidad de una función vectorial.

Una función vectorial \mathbf{r} es **continua en un punto** dado por $t = a$ si el límite de $\mathbf{r}(t)$ cuando $t \rightarrow a$ existe y $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$. Una función vectorial r es **continua en un intervalo** I si es

continua en todos los puntos del intervalo.

5.- Definición de la derivada de una función vectorial.

La derivada de una función vectorial \mathbf{r} se define como $\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$

Para todo t para el cual existe el límite. Si $\mathbf{r}'(c)$ existe para todo c en un intervalo abierto I , entonces r es derivable en el intervalo I . La derivabilidad de funciones vectoriales puede extenderse a intervalos cerrados considerando límites unilaterales.

6.- Derivación de funciones vectoriales.

Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, donde $f, g, y h$ son funciones derivables de t , entonces

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}.$$

7.- Propiedades de la derivada de una función vectorial.

Sean \mathbf{U} y \mathbf{V} vectores y f una función escalar de t ; se tiene entonces:

- 1.- $\frac{d}{dt} [c\mathbf{U}(t)] = c \frac{d}{dt} [\mathbf{U}(t)]$
- 2.- $\frac{d}{dt} [\mathbf{U}(t) + \mathbf{V}(t)] = \frac{d}{dt} [\mathbf{U}(t)] + \frac{d}{dt} [\mathbf{V}(t)]$
- 3.- $\frac{d}{dt} [f(t)\mathbf{U}(t)] = f(t) \frac{d}{dt} [\mathbf{U}(t)] + \mathbf{U}(t) \frac{d}{dt} [f(t)]$
- 4.- $\frac{d}{dt} [\mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{V}(t)] = \left\{ \mathbf{U}(t) \cdot \frac{d}{dt} [\mathbf{V}(t)] \right\} + \left\{ \mathbf{V}(t) \cdot \frac{d}{dt} [\mathbf{U}(t)] \right\}$
- 5.- $\frac{d}{dt} [\mathbf{U}(t) \times \mathbf{V}(t)] = \left\{ \mathbf{U}(t) \times \frac{d}{dt} [\mathbf{V}(t)] \right\} + \left\{ \mathbf{V}(t) \times \frac{d}{dt} [\mathbf{U}(t)] \right\}$
- 6.- $\frac{d}{dt} [\mathbf{U}(s)] = \frac{d}{ds} [\mathbf{U}(s)] \frac{ds}{dt}$ Regla de la cadena.

7.- Si $\|\mathbf{U}(t)\| = c$, entonces $\mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{U}'(t) = 0$.

8.- Integración de funciones vectoriales.

Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ donde $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son funciones integrables de t , entonces la **integral indefinida** (o **antiderivada**) de \mathbf{r} es

$\int \mathbf{r}(t) dt = \left[\int f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int g(t) dt \right] \mathbf{j} + \left[\int h(t) dt \right] \mathbf{k} + C$, siendo $C = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ un vector constante y su **integral definida** en el intervalo $a \leq t \leq b$ es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left[\int_a^b f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t) dt \right] \mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t) dt \right] \mathbf{k}$$

9.- Vector velocidad y vector aceleración.

Si $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son funciones reales de t diferenciables dos veces, y \mathbf{r} el vector de posición de un objeto móvil para un valor t del tiempo definido por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, entonces:

Vector velocidad: $\mathbf{V}(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$

Vector aceleración: $\mathbf{A}(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k}$

Rapidez: $\|\mathbf{V}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$

10.- Longitud de arco.

Si una curva se expresa por medio de $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, siendo $f'(t)$, $g'(t)$ y $h'(t)$ continuas en el intervalo $[a, b]$, entonces la longitud del arco de la curva correspondiente a dicho intervalo del parámetro t viene dada por

$$L = \int_a^b \|\mathbf{V}(t)\| dt$$

$$L = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

11.- Definición de vectores unitarios tangente y normal y binormal, \mathbf{T} , \mathbf{N} y \mathbf{B} .

Sea $\mathbf{r}(t)$ el vector de posición de un objeto móvil para un valor t del tiempo, y sea $\mathbf{V}(t) = \mathbf{r}'(t)$ el vector velocidad en dicho instante t .

El **vector tangente unitario** \mathbf{T} se define por $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{V}(t)}{\|\mathbf{V}(t)\|}$ siempre que $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \quad (\text{Fórmula práctica para determinar } \mathbf{T}(t)).$$

El **vector normal principal unitario N** se define como $\mathbf{N} = \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$ siempre que

$\mathbf{T}' \neq \mathbf{0}$.

$\mathbf{N}(t) = \frac{[\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)] \times \mathbf{r}'(t)}{\|[\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)] \times \mathbf{r}'(t)\|}$ (Fórmula práctica para determinar $\mathbf{N}(t)$).

El **vector binormal unitario B** se define como $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$.

$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}$ (Fórmula práctica para determinar $\mathbf{B}(t)$).

El conjunto de los vectores \mathbf{T} , \mathbf{N} y \mathbf{B} se conoce como triado intrínseco, o triado móvil de Frenet.

Relación entre \mathbf{T} , \mathbf{N} y \mathbf{B} : $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$, $\mathbf{T}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{B}(t)$, $\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t)$.

12.- Recta tangente, recta normal y recta binormal a una curva.

Sea $\mathbf{r}(t_0) = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} + r_z \mathbf{k}$ el vector de posición de un objeto móvil para un valor t_0 .

- Si $\mathbf{T}(t_0) = T_x \mathbf{i} + T_y \mathbf{j} + T_z \mathbf{k}$ es el vector tangente unitario del objeto móvil en dicho instante t_0 , se define para la curva:

Recta tangente: $\frac{x-r_x}{T_x} = \frac{y-r_y}{T_y} = \frac{z-r_z}{T_z}$.

- Si $\mathbf{N}(t_0) = N_x \mathbf{i} + N_y \mathbf{j} + N_z \mathbf{k}$ es el vector normal unitario a la trayectoria en dicho instante t_0 , se define para la curva:

Recta normal: $\frac{x-r_x}{N_x} = \frac{y-r_y}{N_y} = \frac{z-r_z}{N_z}$.

- Si $\mathbf{B}(t_0) = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$ es el vector binormal unitario a la trayectoria en dicho instante t_0 , se define para la curva:

Recta binormal: $\frac{x-r_x}{B_x} = \frac{y-r_y}{B_y} = \frac{z-r_z}{B_z}$.

Para la recta tangente, la recta normal y la recta binormal, el vector director de cada una puede ser determinado mediante $r'(t_0)$, $r'(t_0) \times r''(t_0)$ y $[r'(t_0) \times r''(t_0)] \times r'(t_0)$, respectivamente.

13.- Plano normal, plano rectificante y plano osculador a una curva.

Sea $\mathbf{r}(t_0) = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} + r_z \mathbf{k}$ el vector de posición de un objeto móvil para un valor t_0 .

- Si $\mathbf{T}(t_0) = T_x \mathbf{i} + T_y \mathbf{j} + T_z \mathbf{k}$ es el vector tangente unitario del objeto móvil en dicho instante t_0 , se define para la curva:

Plano normal: $T_x(x-r_x) + T_y(y-r_y) + T_z(z-r_z) = 0$.

- Si $\mathbf{N}(t_0) = N_x \mathbf{i} + N_y \mathbf{j} + N_z \mathbf{k}$ es el vector normal unitario a la trayectoria en dicho instante t_0 , se define para la curva:

Plano tangente: $N_x(x-r_x) + N_y(y-r_y) + N_z(z-r_z) = 0$.

- Si $\mathbf{B}(t_0) = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$ es el vector binormal unitario a la trayectoria en dicho instante t_0 , se define para la curva:

Plano osculador: $B_x(x-r_x) + B_y(y-r_y) + B_z(z-r_z) = 0$.

Para el plano normal, el plano tangente y el plano osculador, el vector normal de cada uno puede ser determinado mediante $r'(t_0)$, $r'(t_0) \times r''(t_0)$ y $[r'(t_0) \times r''(t_0)] \times r'(t_0)$, respectivamente.

Como resumen de las secciones 12 y 13, se tiene que:

- 1- El vector tangente [ó $r'(t_0)$] unitario define a la recta tangente y al plano normal.
2. El vector normal unitario [ó $r'(t_0) \times r''(t_0)$] define a la recta normal y al plano rectificante.
- 3- El vector binormal unitario {ó $[r'(t_0) \times r''(t_0)] \times r'(t_0)$ } define a la recta binormal y al plano osculador.

14.- Curvas planas.

Si $\mathbf{B}(t)$ es constante para todo t , entonces la curva es plana y el plano osculador coincide con el plano de la curva.

15.- Curvatura.

La **curvatura** κ en un punto de la curva descrita mediante el vector de posición $\mathbf{r}(t) = f(t) \mathbf{i} + g(t) \mathbf{j} + h(t) \mathbf{k}$ está dada por $\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$, siendo \mathbf{T} el vector tangente unitario. Si C es la

gráfica de una función dos veces derivable $y = f(x)$, entonces la curvatura k en el punto (x, y) está dada por $k(x) = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}$.

$k(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$ (Fórmula práctica para determinar $k(t)$).

$k(t) = \frac{\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|^2}$

16.- Radio de curvatura. Si $\kappa(t_0)$ es la curvatura de la curva plana C en el punto P_0 , donde $t = t_0$, y $\kappa(t_0) \neq 0$, entonces el radio de curvatura de C en P_0 , denotado por $\rho(t_0)$, se define como

$\rho(t_0) = \frac{1}{\kappa(t_0)}$.

17.- Torsión. La **torsión** τ en un punto de la curva descrita mediante el vector de posición $\mathbf{r}(t) = f(t) \mathbf{i} + g(t) \mathbf{j} + h(t) \mathbf{k}$ está dada por $\tau(t) = \mathbf{N}'(t) \cdot \mathbf{B}(t)$, siendo \mathbf{N} el vector normal unitario y \mathbf{B} el vector binormal unitario.

$\tau(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot [\mathbf{r}''(t) \times \mathbf{r}'''(t)]}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2}$ (Fórmula práctica para determinar $\tau(t)$).

18.- Radio de torsión. Si $\tau(t_0)$, es la torsión de la curva plana C en el punto P_0 , donde $t = t_0$, y $\tau(t_0) \neq 0$, entonces el radio de torsión de C en P_0 , denotado por $\tau^{-1}(t_0)$, se define como

$\tau^{-1}(t_0) = \frac{1}{\tau(t_0)}$.

19.- Circunferencia osculatriz. Sea $\mathbf{r}(t_0) = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j}$ el vector de posición de un objeto móvil para un valor t_0 del tiempo, y sea $\rho(t_0)$ el radio de curvatura. La circunferencia osculatriz (o circunferencia de curvatura) define por $(x-r_x)^2 + (y-r_y)^2 = \rho^2(t_0)$.

20.- Definición de las componentes tangencial y normal de la aceleración. Si \mathbf{A} es la aceleración de un objeto que se mueve a lo largo de una curva plana C en un instante t entonces tendremos $\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}) \mathbf{T} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N}$ y denominaremos $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$ y $\mathbf{A} \cdot \mathbf{N}$ **componentes tangencial y normal de la aceleración** respectivamente. A la componente normal de la aceleración también se le llama **componente centrípeta de la aceleración**.

21.- Otra expresión para la aceleración en función de las componentes tangencial y normal. La aceleración de un objeto cuya función de posición es $\mathbf{r}(t) = f(t) \mathbf{i} + g(t) \mathbf{j} + h(t) \mathbf{k}$ viene dada por $\mathbf{A} = A_T \mathbf{T} + A_N \mathbf{N}$.

$\mathbf{A} = \left[\frac{d}{dt} \|\mathbf{V}(t)\| \right] \mathbf{T} + [k \|\mathbf{V}(t)\|^2] \mathbf{N}$ · k es la curvatura de la trayectoria en el instante t .

$A_T = \frac{d}{dt} \|\mathbf{V}(t)\|$; $A_T = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$ $A_N = k \|\mathbf{V}(t)\|^2$; $A_N = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina.**
 Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
 e-mail: **medinawj@gmail.com**
 Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
<https://www.tutoruniversitario.com/>
 Puerto La Cruz, abril de 2026.