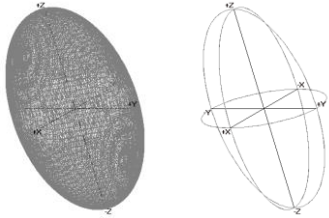


SUPERFICIES EN $\mathbb{R}^3$.

1.- Elipsoide.

En coordenadas cartesianas tridimensionales, la ecuación de la elipsoide de centro en el origen es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, donde a , b y c

(números positivos) son los puntos en los cuales corta a los ejes x , y , z respectivamente (semiejes del elipsoide). Si $a = b = c$, el elipsoide es una esfera.



Elipsoide y secciones sobre los planos coordenados.

Secciones del elipsoide.

Secciones en el plano $x y$ ($z = 0$): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Elipse).

Secciones paralelas al plano $x y$ ($z = k$): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2} = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

Si $|k| < c$, las secciones transversales son elipses.

Si $|k| = c$, la intersección consiste del único punto $(0,0,c)$.

Si $|k| > c$, el plano $z = k$ no intersecciona a la superficie.

Secciones en el plano $x z$ ($y = 0$): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Elipse).

Secciones paralelas al plano $x z$ ($y = k$): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$$

Si $|k| < b$, las secciones transversales son elipses.

Si $|k| = b$, la intersección consiste del único punto $(0,b,0)$.

Si $|k| > b$, el plano $y = k$ no intersecciona a la superficie.

Secciones en el plano $y z$ ($x = 0$): $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Elipse).

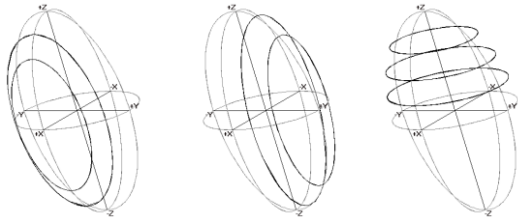
Secciones paralelas al plano $y z$ ($x = k$): $\frac{k^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

Si $|k| < a$, las secciones transversales son elipses.

Si $|k| = a$, la intersección consiste del único punto $(a,0,0)$.

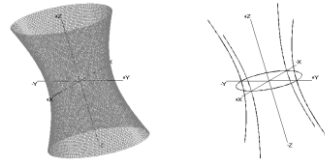
Si $|k| > a$, el plano $x = k$ no intersecciona a la superficie.



Secciones del elipsoide paralelas a los planos coordenados.

2.- Hiperboloide elíptico de una hoja. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. a , b y c son

números positivos. La variable cuadrática cuyo coeficiente es negativo representa el eje del hiperboloide elíptico de una hoja.



Hiperboloide elíptico de una hoja y secciones sobre los planos coordenados.

Secciones del hiperboloide elíptico de una hoja.

Secciones en el plano $x y$ ($z = 0$): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Elipse).

Secciones paralelas al plano $x y$ ($z = k$): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2} = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

Secciones en el plano $x z$ ($y = 0$): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Hipérbola).

Secciones paralelas al plano $x z$ ($y = k$): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$$

Si $|k| < b$, el eje transversal de la hipérbola es paralelo al eje x .

Si $|k| > b$, el eje transversal de la hipérbola es paralelo al eje z .

Si $|k| = b$, la hipérbola degenera en dos rectas: $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$ y

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$$

Secciones en el plano $y z$ ($x = 0$): $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Hipérbola).

Secciones paralelas al plano $y z$ ($x = k$): $\frac{k^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

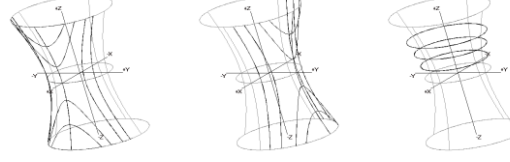
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

Si $|k| < a$, el eje transversal de la hipérbola es paralelo al eje y .

Si $|k| > a$, el eje transversal de la hipérbola es paralelo al eje z .

Si $|k| = a$, la hipérbola degenera en dos rectas: $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ y

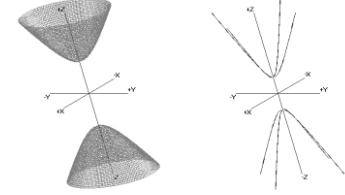
$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$$



Secciones del hiperboloide de una hoja paralelas a los planos coordenados.

3.- Hiperboloide elíptico de dos hojas. $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. a , b y c

son números positivos. La variable cuadrática cuyo coeficiente es positivo representa el eje del hiperboloide elíptico de dos hojas.



Hiperboloide elíptico de dos hojas y secciones sobre los planos coordenados.

Secciones del hiperboloide elíptico de dos hojas.

Secciones en el plano $x y$ ($z = 0$): $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (No existe lugar

geométrico).

Secciones paralelas al plano $x y$ ($z = k$): $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2} = 1$;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1$$

Si $|k| < c$, el plano $z = k$ no intersecciona a la superficie.

Si $|k| = c$, la intersección consiste del único punto $(0,0,c)$.

Si $|k| > c$, las secciones transversales son elipses.

Secciones en el plano $x z$ ($y = 0$): $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Hipérbola).

Secciones paralelas al plano $x z$ ($y = k$): $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2}$$

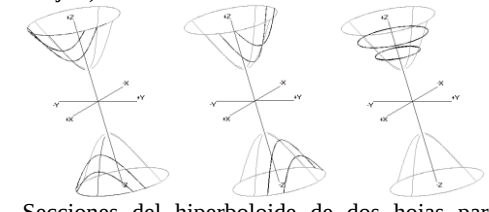
(Hipérbolas cuyos ejes transversos son paralelos al eje z).

Secciones en el plano $y z$ ($x = 0$): $-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Hipérbola).

Secciones paralelas al plano $y z$ ($x = k$): $-\frac{k^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

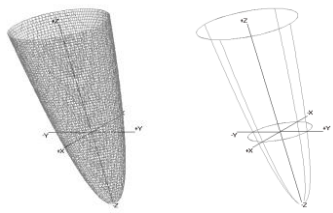
$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{k^2}{a^2}$$

(Hipérbolas cuyos ejes transversos son paralelos al eje z).



Secciones del hiperboloide de dos hojas paralelas a los planos coordenados.

4.- Paraboloide elíptico. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$. a, b son números positivos y $c \neq 0$. La variable lineal representa el eje del paraboloide elíptico.

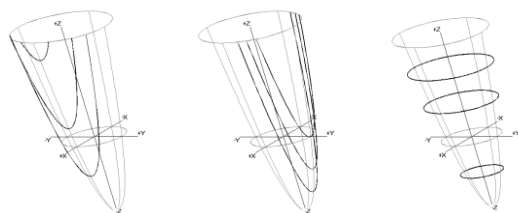


Paraboloide elíptico y secciones sobre los planos coordenados.
Secciones del paraboloide elíptico.
 Secciones en el plano $x y$ ($z = 0$): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ [Elipse degenerada en el punto $(0,0,0)$].

Secciones paralelas al plano $x y$ ($z = k$): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k}{c}$
 Si k y c tienen el mismo signo, la ecuación corresponde a una elipse.
 Si k y c tienen signos opuestos, el plano $z = k$ no intersecta a la superficie.

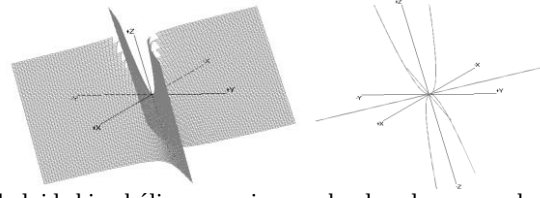
Secciones en el plano $x z$ ($y = 0$): $\frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$ (Parábola).
 Secciones paralelas al plano $x z$ ($y = k$): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ (Parábolas)
 Cuando $c > 0$, las parábolas abren hacia arriba; cuando $c < 0$, las parábolas abren hacia abajo.

Secciones en el plano $y z$ ($x = 0$): $\frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ (Parábola).
 Secciones paralelas al plano $y z$ ($x = k$): $\frac{k^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ (Parábolas).
 Cuando $c > 0$, las parábolas abren hacia arriba; cuando $c < 0$, las parábolas abren hacia abajo.



Secciones del paraboloide elíptico paralelas a los planos coordenados.

5.- Paraboloide hiperbólico.
 Es una superficie de segundo orden de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$. a, b son números positivos y $c \neq 0$. La variable lineal representa el eje del paraboloide hiperbólico.

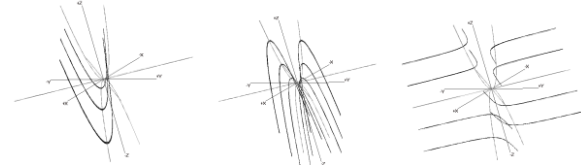


Paraboloide hiperbólico y secciones sobre los planos coordenados.
Secciones del paraboloide hiperbólico.
 Secciones en el plano $x y$ ($z = 0$): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ (Hipérbola degenerada en dos rectas: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ y $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$).

Secciones paralelas al plano $x y$ ($z = k$): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{k}{c}$ (hipérbolas)
 Si k y c tienen el mismo signo, el eje transversal de la hipérbola es paralelo al eje x .
 Si k y c tienen signos opuestos, el eje transversal de la hipérbola es paralelo al eje y .

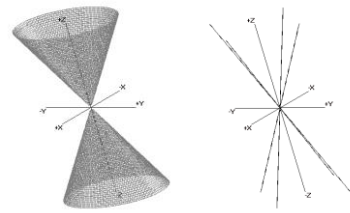
Secciones en el plano $x z$ ($y = 0$): $\frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$ (Parábola).
 Secciones paralelas al plano $x z$ ($y = k$): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ (Parábolas)
 Cuando $c > 0$, las parábolas abren hacia arriba; cuando $c < 0$, las parábolas abren hacia abajo.

Secciones en el plano $y z$ ($x = 0$): $\frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ (Parábola).
 Secciones paralelas al plano $y z$ ($x = k$): $\frac{k^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ (Parábolas)
 Cuando $c > 0$, las parábolas abren hacia abajo; cuando $c < 0$, las parábolas abren hacia arriba.



Secciones del paraboloide hiperbólico paralelas a los planos coordenados.

6.- Cono elíptico. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. a, b y c son números positivos.
 La variable cuadrática cuyo coeficiente es negativo representa el eje del cono.

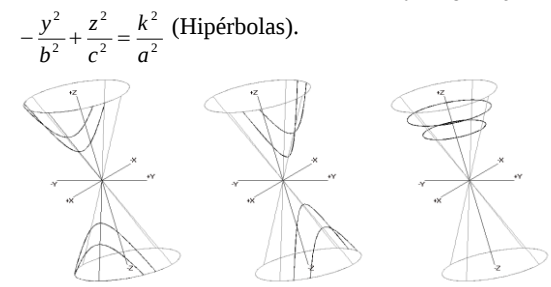


Cono elíptico y secciones sobre los planos coordenados.
Secciones del cono elíptico.
 Secciones en el plano $x y$ ($z = 0$): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ [Elipse degenerada en el punto $(0,0,0)$].

Secciones paralelas al plano $x y$ ($z = k$): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2} = 0$
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}$ (Elipses).
 Secciones en el plano $x z$ ($y = 0$): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (Hipérbola degenerada en dos rectas: $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$ y $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$).

Secciones paralelas al plano $x z$ ($y = k$): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{k^2}{b^2}$ (Hipérbolas)
 Secciones en el plano $y z$ ($x = 0$): $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (Hipérbola degenerada en dos rectas: $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ y $\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$).

Secciones paralelas al plano $y z$ ($x = k$): $\frac{k^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
 $-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2}$ (Hipérbolas).



Secciones del cono elíptico paralelas a los planos coordenados.