

# MATRICES Y DETERMINANTES.

## 1.- Matriz.

Una matriz A de tamaño  $m \times n$  (o de orden  $m \times n$ ) es un arreglo rectangular formado por  $m \times n$  números dispuestos en  $m$  filas y  $n$  columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Los términos *fila* y *renglón* se utilizan indistintamente.

Por lo general, las matrices se denotarán con letras mayúsculas.

En algunos libros las matrices se presentan dentro de paréntesis cuadrados en lugar de paréntesis redondos.

## 2.- Elementos de una matriz.

Cada uno de los números que constituyen la matriz se denomina *elemento* (o entrada) de la matriz. En general el elemento que se encuentre en la fila  $i$  y la columna  $j$  se llama "elemento  $ij$ " y se simboliza con  $a_{ij}, b_{ij}, \dots$  y así sucesivamente.

La notación de doble subíndice es conveniente para identificar la posición de un elemento de la matriz. El primer subíndice  $i$  siempre designa el número de la fila en el cual está el elemento. El segundo subíndice  $j$  designa la columna.

## 3.- Dimensión de una matriz.

Una matriz A se representa en forma abreviada como  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , o simplemente  $A = (a_{ij})$  donde  $a_{ij}$  es un elemento típico de la matriz. Los subíndices de los paréntesis indican el número de filas,  $m$ , y de columnas  $n$ , de la matriz, y se llaman **dimensiones** de la matriz.

## 4.- Matriz nula.

Una *matriz nula* es una matriz donde todos los elementos son iguales a cero (0).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

El símbolo  $O$  se utiliza para denotar la matriz nula. La matriz nula tiene propiedades similares al cero.

## 5.- Matriz transpuesta.

La transpuesta de una matriz implica transformar sus filas en columnas y columnas en filas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz transpuesta se puede hallar a una matriz de cualquier orden.

## 6.- Elementos homólogos de dos matrices.

Al elemento  $a_{ij}$  de una matriz A y al elemento  $b_{ij}$  de la matriz B se le dice elementos homólogos. En general,  $a_{ij}$  es homólogo de  $b_{ij}$ .

## 7.- Matrices iguales.

Se dice que dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y los elementos homólogos (igualmente ubicados) son iguales.

## 8.- Matriz fila.

Un conjunto horizontal de elementos se llama *matriz fila* (o matriz renglón).

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n})$$

**9.- Matriz columna.** Un conjunto vertical de elementos se llama matriz columna (o vector columna).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

## 10.- Matriz cuadrada.

Es la matriz que tiene igual número de filas que de columnas ( $m = n$ ).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A la diagonal que contiene los elementos  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  se le llama *diagonal principal* de la matriz.

## 11.- Tipos especiales de matrices cuadradas.

### 11.1.- Matriz simétrica.

Una *matriz simétrica* es aquella matriz cuadrada donde  $a_{ij} = a_{ji}$

### 11.2.- Matriz diagonal.

Una *matriz diagonal* es una matriz cuadrada donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**11.3.- Matriz identidad.** Una *matriz identidad* es una matriz diagonal donde todos los elementos sobre la diagonal principal son iguales a 1.

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

El símbolo  $I$  se utiliza para denotar la matriz identidad. La matriz identidad tiene propiedades similares a la unidad.

**11.4.- Matriz escalar.** Una matriz A es escalar si es diagonal y todos los elementos diagonales son iguales.

### 11.5.- Matriz triangular superior.

Una *matriz triangular superior* es aquella matriz cuadrada donde todos los elementos por debajo de la diagonal principal son cero.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

### 11.6.- Matriz triangular inferior.

Una *matriz triangular inferior* es aquella matriz cuadrada donde todos los elementos por encima de la diagonal principal son cero.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Una matriz diagonal es tanto triangular superior como triangular inferior.

### 11.7.- Matriz bandeda.

Una *matriz bandeda* tiene todos los elementos iguales a cero con la excepción de una banda centrada sobre la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

La matriz anterior tiene un ancho de banda de 3 y se le da un nombre especial: *matriz tridiagonal*.

### 12.- Opuesta de una matriz.

Dada la matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , se tiene que la matriz  $D = (-a_{ij})_{m \times n}$  se llama matriz opuesta de A y se denota  $-A$ .

### 13.- Suma de matrices.

Dadas las matrices  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  y  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , se llama suma de A y B, y se simboliza  $A + B$ , a la matriz:  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ . Es decir,  $A + B$  se obtiene sumando los elementos homólogos de A y B.

### 14.- Diferencia de dos matrices.

Dadas las matrices  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  y  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , se tiene que la diferencia de A y B se denota  $A - B$  y se define como  $A - B = A + (-B) = [a_{ij} + (-b_{ij})]_{m \times n}$ . Es decir,  $A - B$  se obtiene sumando la matriz A con la matriz opuesta de B.

### 15.- Propiedades de la suma de matrices.

Si A, B y C son matrices  $m \times n$ , se verifica que

**12.1.-**  $A + B = B + A$  (Propiedad conmutativa)

**12.2.-**  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (Propiedad asociativa)

**12.3.-**  $A + 0 = 0 + A = A$  (Elemento neutro)

**12.4.-** Cualquiera que sea A, existe D tal que  $A + D = 0$  (Elemento opuesto)

### 16.- Producto de un número real por una matriz.

Si  $\alpha$  es un número real y  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , entonces el producto de  $\alpha$  por A es la matriz  $m \times n$  que se obtiene de multiplicar cada elemento de A por  $\alpha$ , es decir  $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m \times n}$

### 17.- Propiedades del producto de un número real por una matriz.

Si  $\alpha$  y  $\beta$  son dos números reales y A y B matrices  $m \times n$ , se cumple que

**14.1.-**  $\alpha A$  es una matriz  $m \times n$

**14.2.-**  $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$

**14.3.-**  $1 A = A$

**14.4.-**  $\alpha (\beta A) = \alpha \beta A$

**14.5.-**  $(-1) A = -A$

**14.6.-**  $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$

### 18.- Producto de matrices.

La condición para que esté definido el producto entre dos matrices es que el número de columnas del primer factor coincida con el número de filas del segundo factor.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

La matriz resultante de la multiplicación tiene igual número de filas que el primer factor e igual número de columnas que el segundo factor. La multiplicación de matrices no es conmutativa.

### 19.- Matriz involutiva.

Una matriz A de  $n \times n$  tal que  $A^2 = I$  se llama involutiva.

### 20.- Propiedades del producto de matrices.

Si A, B y C son matrices para las cuales están definidas las operaciones indicadas, se verifica:

**16.1.-**  $0 \times A = 0$

**16.2.-**  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$  (Propiedad asociativa)

**16.3.-**  $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$  (Propiedad distributiva por la izquierda del producto respecto a la suma)

**16.4.-**  $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$  (Propiedad distributiva por la derecha del producto respecto a la suma)

