

TÉCNICAS DE INTEGRACION.

1.- Integración por partes. La integración por partes resulta útil cuando el integrando está conformado por el producto de funciones inversas, logarítmicas, algebraicas, trigonométricas y exponenciales.

1.1 Fórmula del método de integración por partes: $\int uv' dx = uv - \int vu' du$

1.2 Esquema para usar integración por partes $\int uv' dx$:

i.- Tómesese como u aquella porción del integrando que tiene por derivada u' una función más simple que la propia u .

ii.- Tómesese como v' la porción más complicada del integrando que puede integrarse "fácilmente".

1.3.- Sugerencias para el uso de integraciones por partes sucesivas (iteradas o cíclicas).

i.- Tener cuidado de *no conmutar* las elecciones de u y v' en sucesivas aplicaciones.

ii.- Después de cada aplicación, vigilar la aparición de un *múltiplo constante* de la integral original.

1.4 Regla nemotécnica. La elección conveniente de u (según el orden de aparición en el integrando) es:

Inversa > Logarítmica > Algebraica > Trigonométrica > Exponencial (ILATE).

Nota: El método de integración por partes suele conducir a integrales inmediatas, con cambio de variables, en fracciones simples, por sustitución trigonométrica ó potencias trigonométricas.

2.- Método de Completar el cuadrado. $x^2 + bx + c = (x + \frac{1}{2}b)^2 + [c - (\frac{1}{2}b)^2]$ $u = x + \frac{1}{2}b$; $du = dx$

3.- Sustituciones trigonométricas.

3.1.- $\int f(\sqrt{a^2 - u^2}) du$: tómesese $u = a \sin \theta$

3.2.- $\int f(\sqrt{a^2 + u^2}) du$: tómesese $u = a \tan \theta$ 3.3.- $\int f(\sqrt{u^2 - a^2}) du$: tómesese $u = a \sec \theta$

Nota: El método de integración mediante sustitución trigonométrica suele conducir a integrales inmediatas, con cambio de variable ó de expresiones trigonométricas.

4.- Integrales de expresiones trigonométricas.

4.1.- Reglas de las potencias para integrales trigonométricas. Para $n \neq -1$:

$$\int \sin^n x (\cos x) dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C \quad \int \cos^n x (-\sin x) dx = \frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C$$

$$\int \sec^n x (\sec x \tan x) dx = \frac{\sec^{n+1} x}{n+1} + C \quad \int \tan^n x (\sec^2 x) dx = \frac{\tan^{n+1} x}{n+1} + C$$

4.2.- Integrales que contienen seno y coseno.

i.- Si la potencia del seno es impar y positiva, conservar un factor seno y convertir los demás en cosenos. Aplicar el cambio de variable $z = \cos x$. Desarrollar e integrar.

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \cos^n x (\sin x) dx = \int \underbrace{(\sin^2 x)^k}_{\text{Convertiren cosenos}} \cos^n x (\sin x) dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x (\sin x) dx$$

ii.- Si la potencia del coseno es impar y positiva, conservar un factor coseno y convertir los demás en senos. Aplicar el cambio de variable $z = \sin x$. Desarrollar e integrar.

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x (\cos x) dx = \int \sin^m x \underbrace{(\cos^2 x)^k}_{\text{Convertiren senos}} (\cos x) dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k (\cos x) dx$$

iii.- Si las potencias de ambos, seno y coseno, son impares, positivas y diferentes, aplicar i ó ii al de la menor potencia. Si se aplica el procedimiento al de la mayor potencia también se obtiene el resultado de la integral, pero con mayor cantidad de operaciones.

iv.- Si las potencias de ambos, seno y coseno, son pares, positivas y diferentes, usar repetidamente las identidades $\sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta$, $\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta$.

v.- Si las potencias de ambos, seno y coseno, son positivas e iguales, usar la identidad $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

Si las potencias de ambos, seno y coseno son impares e iguales, también funciona indistintamente i ó ii con igual cantidad de operaciones.

Si las potencias de ambos, seno y coseno son pares e iguales, también funciona iv, pero con mayor cantidad de operaciones.

vi.- Si no ocurre ninguna de las cinco situaciones precedentes, intentar reescribir el integrando en términos de secantes, tangentes, cosecantes y cotangentes.

4.3.- Integrales que contienen secante y tangente.

i.- Si existen factores secante y la potencia de la tangente es impar y positiva, conservar un factor secante por tangente y pasar los demás a secantes. Aplicar el cambio de variable $z = \sec x$. Desarrollar e integrar.

$$\int \sec^m x \tan^{2k+1} x dx = \int \sec^{m-1} x \tan^{2k} x (\sec x \tan x) dx = \int \sec^{m-1} x \underbrace{(\tan^2 x)^k}_{\text{Convertiren secantes}} (\sec x \tan x) dx$$

$$\int \sec^{m-1} x (\sec^2 x - 1)^k (\sec x \tan x) dx$$

Si además la potencia de la secante es par, positiva y de potencia menor a la potencia de la tangente, aplicar ii, la cual conduce a menor cantidad de operaciones.

ii.- Si la potencia de la secante es par y positiva, conservar un factor secante cuadrado y pasar las demás a tangentes. Aplicar el cambio de variable $z = \tan x$. Desarrollar e integrar.

$$\int \sec^{2k} x \tan^n x dx = \int \sec^{2k-2} x \tan^n x (\sec^2 x) dx = \int \underbrace{(\sec^2 x)^{k-1}}_{\text{Convertiren tangentes}} \tan^n x (\sec^2 x) dx$$

$$= \int (1 + \tan^2 x)^{k-1} \tan^n x (\sec^2 x) dx$$

Si existen factores tangente y la potencia de la tangente es impar, positiva y de potencia menor a la potencia de la secante, aplicar i, la cual conduce a menor cantidad de operaciones.

iii.- Si no hay factores secante y la potencia de la tangente es par y positiva, convertir un factor $\tan^2 x$ en secantes. Después desarrollar y repetir el proceso si fuese necesario.

$$\int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \underbrace{(\tan^2 x)}_{\text{Convertiren secantes}} dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x) dx - \int \tan^{n-2} x dx$$

iv.- Si no hay factores tangente y la potencia de la secante es impar y positiva, aplicar integración por partes: $\int \sec^{2k+1} x dx = \int \sec^{2k-1} x (\sec^2 x) dx \cdot u = \sec^{2k-1} x$, $dv = \sec^2 x dx$

v.- Si no ocurre ninguna de las cuatro situaciones precedentes, intentar reescribir el integrando en términos de senos y cosenos.

4.4.- Integrales que contienen cosecante y cotangente.

i.- Si existen factores cosecante y la potencia de la cotangente es impar y positiva, reservar un factor cosecante por cotangente y pasar los demás a cosecantes. Aplicar el cambio de variable $z = \csc x$. Desarrollar e integrar.

$$\int \csc^m x \cot^{2k+1} x dx = \int \csc^{m-1} x \cot^{2k} x (\csc x \cot x) dx = \int \csc^{m-1} x \underbrace{(\cot^2 x)^k}_{\text{Convertiren cosecantes}} (\csc x \cot x) dx$$

$$= \int \csc^{m-1} x (\csc^2 x - 1)^k (\csc x \cot x) dx$$

Si además la potencia de la cosecante es par, positiva y de potencia menor a la potencia de la cotangente, aplicar ii, la cual conduce a menor cantidad de operaciones.

ii.- Si la potencia de la cosecante es par y positiva, reservar un factor cosecante cuadrado y pasar las demás a cotangentes. Aplicar el cambio de variable $z = \cot x$. Desarrollar e integrar.

$$\int \csc^{2k} x \cot^n x dx = \int \csc^{2k-2} x \cot^n x (\csc^2 x) dx = \int \underbrace{(\csc^2 x)^{k-1}}_{\text{Convertiren cotangents}} \cot^n x (\csc^2 x) dx$$

$$= \int (1 + \cot^2 x)^{k-1} \cot^n x (\csc^2 x) dx$$

Si además la potencia de la cotangente es impar, positiva y de potencia menor a la potencia de la cosecante, aplicar i, la cual conduce a menor cantidad de operaciones.

iii.- Si no hay factores cosecante y la potencia de la cotangente es par y positiva, convertir un factor $\cot^2 x$ en cosecantes. Desarrollar y repetir el proceso si fuese necesario.

$$\int \cot^n x dx = \int \cot^{n-2} x \underbrace{(\cot^2 x)}_{\text{Convertiren cosecantes}} dx = \int \cot^{n-2} x (\csc^2 x - 1) dx = \int \cot^{n-2} x (\csc^2 x) dx - \int \cot^{n-2} x dx$$

iv.- Si no hay factores cotangente y la potencia de la cosecante es impar y positiva, aplicar integración por partes.

$$\int \csc^{2k+1} x dx = \int \csc^{2k-1} x (\csc^2 x) dx \cdot u = \csc^{2k-1} x, dv = \csc^2 x dx$$

v.- Si no ocurre ninguna de las cuatro situaciones precedentes, intentar reescribir el integrando en términos de senos y cosenos.

4.5.- Integrales que contienen producto de senos y cosenos de ángulos diferentes. Para resolver integrales de la forma $\int \sin(ax) \sin(bx) dx$, $\int \sin(ax) \cos(bx) dx$ y $\int \cos(ax) \cos(bx) dx$, utilizar las siguientes identidades:

$$\sin \theta \sin \phi = \frac{1}{2} [\cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi)]$$

$$\sin \theta \cos \phi = \frac{1}{2} [\sin(\theta - \phi) + \sin(\theta + \phi)]$$

$$\cos \theta \cos \phi = \frac{1}{2} [\cos(\theta - \phi) + \cos(\theta + \phi)]$$

5.- Fracciones simples (Separación en fracciones parciales). La integración por fracciones simples resulta útil cuando el integrando está conformado por el cociente de polinomios.

Descomposición de $\frac{N(x)}{D(x)}$ en fracciones simples.

i. Si $\frac{N(x)}{D(x)}$ es una fracción racional impropia [esto es, si el grado de $D(x)$ no es mayor que el de $N(x)$],

dividir $N(x)$ por $D(x)$ para obtener $\frac{N(x)}{D(x)} = C(x) + \frac{N_1(x)}{D(x)}$ y aplicar las reglas 1, 2, 3 y 4.

ii. Descomponer completamente $D(x)$ en factores de la forma $(px + q)^n$, $(x^2 + a^2)^n$ y $[(x \pm b)^2 + a^2]^n$.

Regla 1. Factores lineales que no se repiten. Por cada factor de la forma $p_i x + q_i$ la descomposición en fracciones simples ha de incluir la siguiente suma de n fracciones:

$$\frac{N_1(x)}{(p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2) \dots (p_n x + q_n)} = \frac{A_1}{p_1 x + q_1} + \frac{A_2}{p_2 x + q_2} + \dots + \frac{A_n}{p_n x + q_n}$$

Integral útil: $\int \frac{dx}{p_1 x + q_1} = \frac{1}{p_1} \ln(p_1 x + q_1) + C$

Regla 2. Factores lineales que se repiten. Por cada factor de la forma $(px + q)^n$ la descomposición en fracciones simples ha de incluir la siguiente suma de n fracciones:

$$\frac{N_1(x)}{(px + q)^n} = \frac{A_1}{px + q} + \frac{A_2}{(px + q)^2} + \dots + \frac{A_n}{(px + q)^n} \quad \int \frac{dx}{(px + q)^n} = \frac{-1}{p(n-1)(px + q)^{n-1}}$$

Regla 3. Factores cuadráticos que no se repiten. Por cada factor de la forma $x^2 + a_i^2$ y $(x \pm b_i)^2 + a_i^2$ la descomposición en fracciones simples ha de incluir la suma de las siguientes fracciones:

$$\frac{N_1(x)}{(x^2 + a_1^2)(x^2 + a_2^2) \dots (x^2 + a_n^2)} = \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + a_1^2} + \frac{B_2 x + C_2}{x^2 + a_2^2} + \dots + \frac{B_n x + C_n}{x^2 + a_n^2}$$

$$\frac{N_1(x)}{[(x \pm b_1)^2 + a_1^2][(x \pm b_2)^2 + a_2^2] \dots [(x \pm b_n)^2 + a_n^2]} = \frac{B_1(x \pm b_1) + C_1}{(x \pm b_1)^2 + a_1^2} + \frac{B_2(x \pm b_2) + C_2}{(x \pm b_2)^2 + a_2^2} + \dots + \frac{B_n(x \pm b_n) + C_n}{(x \pm b_n)^2 + a_n^2}$$

Integrales útiles: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ $\int \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C$

Regla 4. Factores cuadráticos repetidos. Por cada factor de la forma $(x^2 + a^2)^n$ y $[(x \pm b)^2 + a^2]^n$ la descomposición en fracciones simples ha de incluir la suma de las siguientes fracciones:

$$\frac{N_1(x)}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + a^2} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + a^2)^2} + \dots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + a^2)^n}$$

$$\frac{N_1(x)}{[(x \pm b)^2 + a^2]^n} = \frac{B_1(x \pm b) + C_1}{(x \pm b)^2 + a^2} + \frac{B_2(x \pm b) + C_2}{[(x \pm b)^2 + a^2]^2} + \dots + \frac{B_n(x \pm b) + C_n}{[(x \pm b)^2 + a^2]^n}$$

6.- Esquema para resolver la ecuación fundamental.

6.1.- Factores lineales.

- i.- Sustituir en x las raíces de los distintos factores lineales que aparecen en la ecuación fundamental.
- ii.- Si hay factores lineales repetidos, usar los coeficientes ya determinados en la parte i para reescribir la ecuación fundamental. A continuación sustituir en x otros valores.

6.2.- Factores cuadráticos.

- i.- Desarrollar la ecuación fundamental.
- ii.- Agrupar términos según las potencias de x .
- iii.- Igualar los coeficientes de las potencias correspondientes de x , obteniendo así un sistema de ecuaciones lineales (Aplicación del Método de los Coeficientes Indeterminados).
- iv.- Resolver el sistema lineal.

7.- Funciones racionales del seno y del coseno.

Para integrales de la forma $\int f(\sin x, \cos x) dx$ donde f es una función racional:

7.1.- Hágase $z = \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$, con lo cual: $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$.

7.2.- Si $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, hágase $z = \cos x$.

7.3.- Si $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, hágase $z = \sin x$.

7.4.- Si $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$ ó $f(\sin x, \cos x) = f(\tan x)$, hágase $z = \tan x$, con lo cual:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+z^2}, \quad \sin^2 x = \frac{z^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

Nota: El método de integración de funciones racionales de seno y coseno suele conducir a integrales inmediatas, con cambio de variables ó en fracciones simples.

8.- Integrales de funciones irracionales.

8.1.- Una expresión que contiene solamente potencias fraccionarias de x puede transformarse en forma racional mediante la sustitución $x = z^n$ siendo n el mínimo común múltiplo de los exponentes fraccionarios de x .

8.2.- Una expresión que contiene solamente potencias fraccionarias de $ax + b$ $\int f[\sqrt[n]{(ax+b)^m}] dx$ puede transformarse en forma racional mediante la sustitución $ax + b = z^n$ siendo n el mínimo común múltiplo de los exponentes fraccionarios de $ax + b$.

8.3.- Integrales del tipo $\int f\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{2}}, \dots\right] dx$ se hallan valiéndose de la sustitución

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n, \text{ donde } n \text{ es el mínimo común múltiplo de los números } q_1, q_2, \dots$$

8.4.- Integrales del tipo $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ se reducen al tipo de integrales $\int \frac{P(t) dt}{\sqrt{At^2 + Bt + C}}$

valiéndose de la sustitución $t = \frac{1}{x-\alpha}$, $dx = -\frac{1}{t^2}$

9.- Integrales de expresiones binomias.

Una expresión de la forma $x^m (a + bx^n)^p$ siendo a y b constantes cualesquiera y los exponentes m, n, p números racionales, se llama una expresión binomia. Toda expresión binomia puede reducirse a la forma $x^m (a + bx^n)^{\frac{1}{s}}$.

Caso 1.- Cuando $\frac{m+1}{n} = \text{Un número entero o cero}$, se efectúa la sustitución $a + bx^n = z^s$.

Caso 2.- Cuando $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s} = \text{Un número entero o cero}$, se efectúa la sustitución $a + bx^n = z^s x^r$.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina.**
 Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
 e-mail: **medinawj@gmail.com**
 Twitter: **@medinawj**

