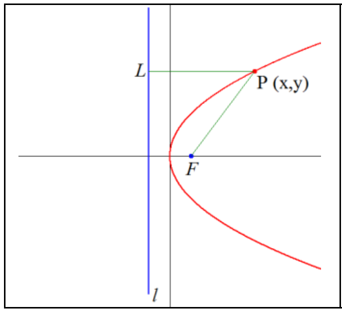
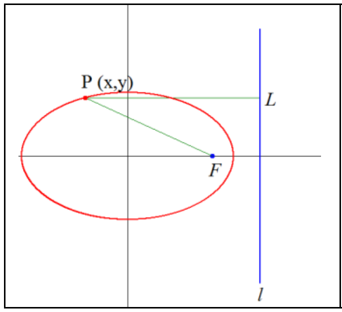
CIRCUNFERENCIA Y PARÁBOLA.

1.- Cónica. Definición.

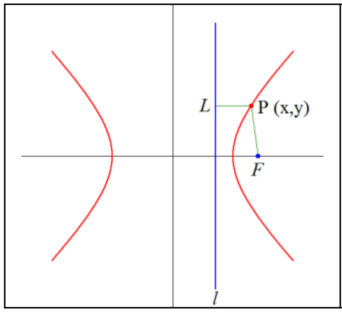
En el plano, sea l una recta fija (la directriz) y F un punto fijo (el foco), que no está sobre la recta. El lugar geométrico de los puntos para los que el cociente de la distancia $|PF|$ desde el foco entre la distancia $|PL|$ a la recta es una constante positiva e (la excentricidad), es decir, el conjunto de puntos P que satisfacen $|PF| = e\,|PL|$ es una cónica.



Parábola ($e = 1$)



Elipse ($0 < e < 1$)



Hipérbola ($e > 1$)

Las cónicas son: Circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.

Suele indicarse que la circunferencia **no es una cónica independiente**, sino un **caso particular de la elipse**. Sin embargo, en muchos textos se la incluye como un tipo de sección cónica por su importancia histórica y geométrica.

La circunferencia no tiene directriz, porque su excentricidad es cero.

2.- Ecuación general de segundo grado.

En la ecuación general de segundo grado $A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$, si $B = 0$ y si $A = 0$ y $C \neq 0$, ó $C = 0$, entonces su gráfica es una de las siguientes: una parábola, dos rectas paralelas, una recta o el conjunto vacío.

La gráfica de ecuación $A\,x^2 + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$ donde A y C no son ambos cero, es una cónica o una cónica degenerada. Si es una cónica, entonces la gráfica es:

i) Una *circunferencia*, un *punto* o el *conjunto vacío* si $A = C$.

ii) Una *parábola* si $A = 0$ ó $C = 0$, esto es $A\,C = 0$.

iii) Una *elipse*, un *punto* o el *conjunto vacío* si A y C tienen el mismo signo, es decir, $A.C > 0$.

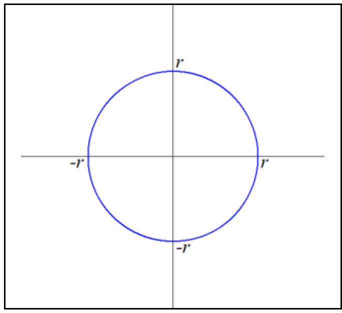
iv) Una *hipérbola* si A y C tienen signos opuestos, esto es, $A.C < 0$.

3.- Circunferencias.

3.1.- Definición.

Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo. El punto fijo se denomina **centro** de la circunferencia, y la distancia constante se le llama **radio** de la circunferencia.

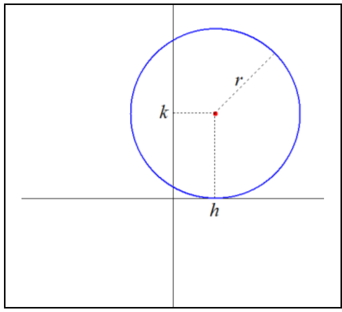
3.2.- Ecuación de una circunferencia.



Centro: $C\,(0\,,0)$.

Radio: r.

$x^2 + y^2 = r^2$



Centro: $C\,(h\,,k)$.

Radio: r.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

3.3.- Trazo de una circunferencia.

Para trazar la circunferencia que tiene ecuación $x^2 + y^2 = r^2$

1.- Se resuelve esta ecuación para y y se obtiene $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$. La gráfica de cada una de estas ecuaciones es una semicircunferencia.

2.- Se trazan estas dos semicircunferencias, obteniéndose así la circunferencia deseada.

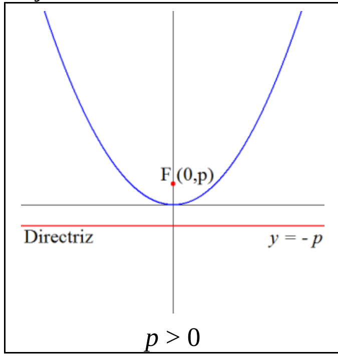
4.- Parábolas.

4.1.- Definición.

Una **parabola** es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo y una recta fija. El punto fijo se denomina foco, y la recta fija se llama directriz.

4.2.- Ecuación de la parábola.

Eje vertical.



Ecuación: $x^2 = 4\,p\,y$

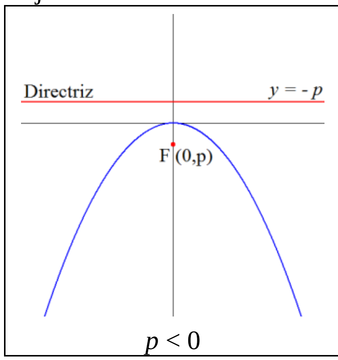
Foco: $F\,(0\,,p)$

Vértice: $V\,(0\,,0)$

Directriz

$y = -\,p$

Eje vertical.



Ecuación: $x^2 = 4\,p\,y$

Foco: $F\,(0\,,p)$

Vértice: $V\,(0\,,0)$

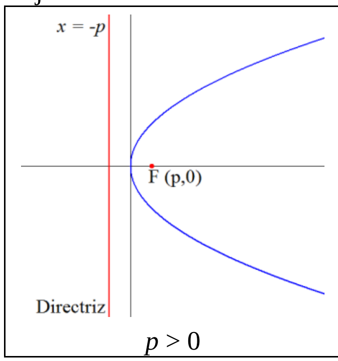
Directriz

$y = -\,p$

La gráfica de cualquier ecuación cuadrática de la forma $y = a\,x^2 + b\,x + c$ donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$, es una parábola cuyo eje es vertical.

Obsérvese que la ecuación $y = a\,x^2 + b\,x + c$ corresponde a una función cuadrática incluida en el estudio de funciones reales.

Eje: Horizontal.



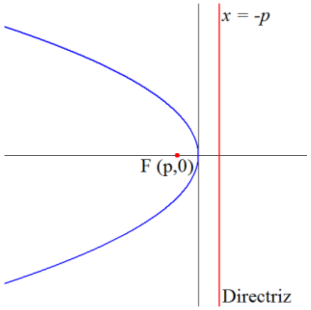
Ecuación: $y^2 = 4\,p\,x$

Foco: $F\,(p\,,0)$

Vértice: $V\,(0\,,0)$

Directriz: $x = -\,p$

Eje: Horizontal.



$p < 0$

Ecuación: $y^2 = 4\,p\,x$

Foco: $F\,(\,p\,,0\,)$

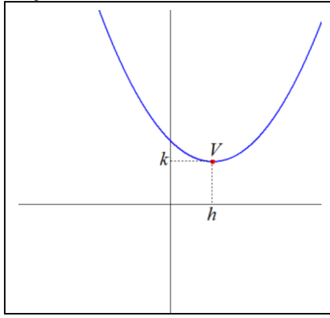
Vértice: $V\,(\,0\,,0\,)$

Directriz: $x = -\,p$

4.3.- Formas estándar de las ecuaciones de las parábolas.

p es la distancia dirigida del vértice al foco de una parábola.

Eje: vertical.

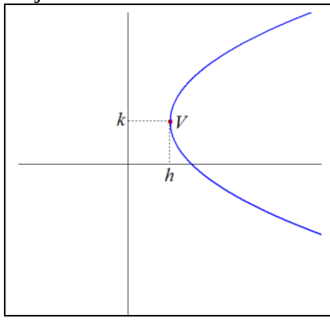


Vértice: $V\,(\,h\,,k\,)$

$(x - h)^2 = 4\,p\,(y - k)$

Directriz: $y = k - p$

Eje: horizontal.



Vértice: $V\,(\,h\,,k\,)$

$(y - k)^2 = 4\,p\,(x - h)$

Directriz: $x = h - p$

La gráfica de cualquier ecuación cuadrática de la forma $x = a\,y^2 + b\,y + c$ donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$, es una parábola cuyo eje es horizontal.

4.4.- Trazo de una parábola.

A fin de trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y^2 = 4\,p\,x$:

1.- Resuelva para y considerando la raíz cuadrada en los dos miembros de la ecuación, obteniéndose las dos ecuaciones

$y = \sqrt{4\,p\,x}$ y $y = -\sqrt{4\,p\,x}$

2.- La unión de las gráficas de estas dos ecuaciones proporciona la gráfica de $y^2 = 4\,p\,x$

4.5.- Lado recto (latus rectum) de la parábola.

Es la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje principal de la parábola.

4.6.- Longitud del lado recto de la parábola.

$L = |\,4\,p\,|$

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**

El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
https://www.tutoruniversitario.com/ Puerto la Cruz, abril de 2026.

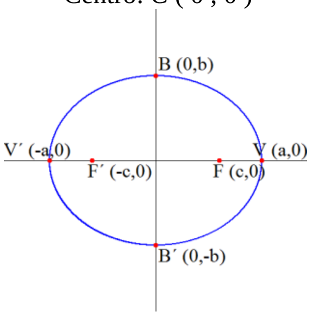
ELIPSE E HIPÉRBOLA.

1.- Elipses.

1.1.- Definición y elementos. Una **elipse** es el conjunto de puntos de un plano tales que la suma de sus distancias desde dos puntos fijos es constante. Cada punto fijo se denomina **foco**. La recta que pasa por los focos se denomina **eje principal**. Los puntos de intersección de la elipse con su eje principal se llaman **vértices**. El punto del eje principal que se encuentra a la mitad de la distancia entre los vértices recibe el nombre de **centro**. El segmento del eje principal entre los dos vértices se denomina eje mayor. Su longitud es 2 a unidades. El segmento del eje menor entre los puntos (0 , b) y (0 , – b) se denomina eje menor. Su longitud es 2 b unidades. El foco yace siempre sobre el eje mayor a una distancia c del centro, siendo $b^2 = a^2 - c^2$.

1.2.- Ecuación de una elipse ($a > b$). $b^2 = a^2 - c^2$.

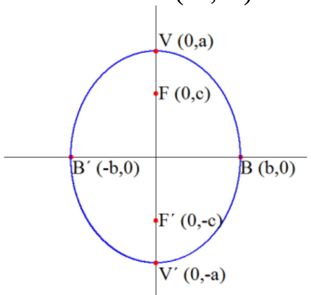
Eje principal: Horizontal
Centro: $C(0, 0)$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Focos:
$(-c, 0)$ y $(c, 0)$
Vértices sobre el eje mayor:
$(-a, 0)$ y $(a, 0)$
Vértices sobre el eje menor:
$(0, -b)$ y $(0, b)$
Coordenadas que delimitan el lado recto:
$\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$, $\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$,
$\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$, $\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$
Directrices:
$x = -a^2/c$, $x = a^2/c$

Eje principal: Vertical
Centro: $C(0, 0)$

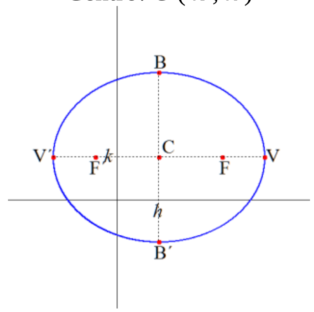


$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Focos:
$(0, -c)$ y $(0, c)$
Vértices sobre el eje mayor:
$(0, -a)$ y $(0, a)$
Vértices sobre el eje menor:
$(-b, 0)$ y $(b, 0)$
Coordenadas que delimitan el lado recto:
$\left(-\frac{b^2}{a},-c\right)$, $\left(-\frac{b^2}{a},c\right)$.
$\left(\frac{b^2}{a},-c\right)$, $\left(\frac{b^2}{a},c\right)$
Directrices:
$y = -a^2/c$, $y = a^2/c$

1.3.- Forma estándar de la ecuación de la elipse.

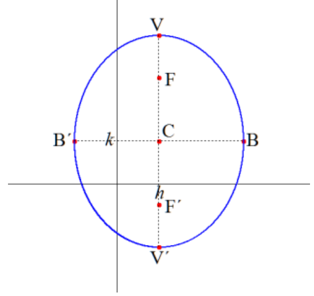
Eje principal: Horizontal
Centro: $C(h, k)$



$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Focos:
$(h-c, k)$ y $(h+c, k)$
Vértices sobre el eje mayor:
$(h-a, k)$ y $(h+a, k)$
Vértices sobre el eje menor:
$(h, k-b)$ y $(h, k+b)$
Coordenadas que delimitan el lado recto:
$\left(h-c,k-\frac{b^2}{a}\right)$,
$\left(h-c,k+\frac{b^2}{a}\right)$
$\left(h+c,k-\frac{b^2}{a}\right)$
$\left(h+c,k+\frac{b^2}{a}\right)$
Directrices:
$x = h - a^2/c$, $x = h + a^2/c$

Eje principal: Vertical
Centro: $C(h, k)$



$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Focos:
$(h, k-c)$ y $(h, k+c)$
Vértices sobre el eje mayor:
$(h, k-a)$ y $(h, k+a)$
Vértices sobre el eje menor:
$(h+b, k)$ y $(h-b, k)$
Coordenadas que delimitan el lado recto:
$\left(h-\frac{b^2}{a},k-c\right)$,
$\left(h-\frac{b^2}{a},k+c\right)$.
$\left(h+\frac{b^2}{a},k-c\right)$,
$\left(h+\frac{b^2}{a},k+c\right)$
Directrices:
$y = k - a^2/c$, $y = k + a^2/c$

Si en la ecuación general de segundo grado $A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$, $B = 0$ y $A.C > 0$, entonces la gráfica es una elipse, un punto o el conjunto vacío.

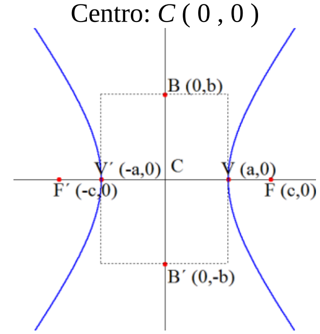
2.- Hipérbolas.

2.1.- Definición y elementos.

Una **hipérbola** es un conjunto de puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Los dos puntos fijos se denominan **focos**. La recta que pasa por los focos se denomina **eje principal** o eje **transverso**. Los puntos donde la hipérbola intersecta al eje principal se llaman **vértices**. El punto que se encuentra a la mitad de la distancia entre los vértices recibe el nombre de **centro**. La longitud del **eje transverso** es 2 a unidades. La longitud del **eje conjugado** es 2 b unidades.

2.2.- Ecuación de una hipérbola ($a < b$). $c^2 = a^2 + b^2$

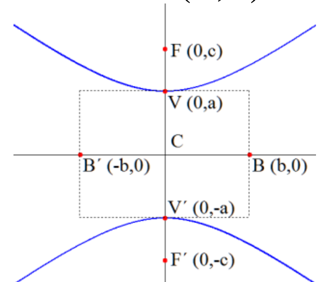
Eje transverso: Horizontal
Centro: $C(0, 0)$



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Focos:
$(-c, 0)$ y $(c, 0)$
Vértices:
$(-a, 0)$ y $(a, 0)$
Coordenadas que delimitan el lado recto:
$\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$, $\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$,
$\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$, $\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$
Asíntotas: $y=\pm\frac{b}{a}x$

Eje transverso: Vertical
Centro: $C(0, 0)$

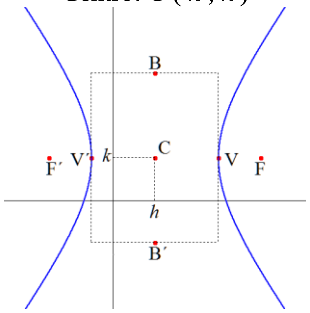


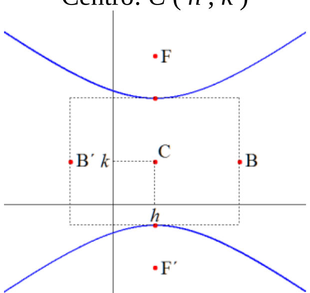
$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Focos:
$(0, -c)$ y $(0, c)$
Vértices:
$(0, -a)$ y $(0, a)$
Coordenadas que delimitan el lado recto:
$\left(-\frac{b^2}{a},-c\right)$, $\left(-\frac{b^2}{a},c\right)$.
$\left(\frac{b^2}{a},-c\right)$, $\left(\frac{b^2}{a},c\right)$
Asíntotas: $y=\pm\frac{a}{b}x$

Si $a = b$ la hipérbola se denomina hipérbola equilátera.
La hipérbola equilátera cuya ecuación es $x^2 - y^2 = 1$ se conoce como hipérbola unitaria.

2.3.- Forma estándar de la ecuación de la hipérbola.

Eje transverso: Horizontal Centro: $C\,(\,h\,,\,k\,)$  $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ Asíntotas: $y-k=\pm\dfrac{b}{a}(x-h)$	Focos: $(\,h-c\,,\,k\,)$ y $(\,h+c\,,\,k\,)$ Vértices: $(\,h-a\,,\,k\,)$ y $(\,h+a\,,\,k\,)$ Coordenadas que delimitan el lado recto: $\left(h-c,k-\dfrac{b^2}{a}\right)$, $\left(h-c,k+\dfrac{b^2}{a}\right)$ $\left(h+c,k-\dfrac{b^2}{a}\right)$ $\left(h+c,k+\dfrac{b^2}{a}\right)$

Eje transversoVertical Centro: $C\,(\,h\,,\,k\,)$  $-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$ Asíntotas: $y-k=\pm\dfrac{a}{b}(x-h)$	Focos: $(\,h\,,\,k-c\,)$ y $(\,h\,,\,k+c)$ Vértices: $(\,h\,,\,k-a\,)$ y $(\,h\,,\,k+a\,)$ Coordenadas que delimitan el lado recto: $\left(h-\dfrac{b^2}{a},k-c\right)$, $\left(h-\dfrac{b^2}{a},k+c\right)$. $\left(h+\dfrac{b^2}{a},k-c\right)$, $\left(h+\dfrac{b^2}{a},k+c\right)$

Si en la ecuación general de segundo grado $A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$, $B = 0$ y $A.C < 0$, entonces la gráfica es una hipérbola o dos rectas que se intersectan.

3.- Lado recto (latus rectum) de las cónicas.

Es la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje principal de la cónica.

3.1.- Longitud de lado recto de la elipse y la hipérbola.

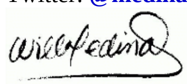
$$L=\frac{2\,b^2}{a}$$

4.- Excentricidad de una elipse e hipérbola.

La **excentricidad** e de una elipse o una hipérbola es la razón de la distancia no dirigida entre los focos y la distancia no dirigida entre los vértices; esto es $e=\dfrac{c}{a}$

Elipse: ($0 < e < 1$).
Hipérbola: ($e > 1$).

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
https://www.tutoruniversitario.com/ Puerto la Cruz, abril de 2026.