DERIVADAS.

1.- Definición de la derivada[1] de una función. La derivada de la función f es aquella función, denotada por f'[2], tal que su valor en un número x del dominio de f está dado por $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ si este límite existe.

Una función que tiene una derivada se dice diferenciable.
Una derivada se calcula mediante la operación de diferenciación o derivación.

1.1.- Notaciones para la derivada de una función. Otras dos notaciones para la derivada de una función f son: $\frac{d}{dx}[f(x)]$ y $D_x[f(x)]$.

La derivada de y con respecto a x en general se denota por uno de los tipos de notación siguientes: $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$.

2.- Definición de recta tangente a la gráfica de una función. Suponga que la función f es continua en x_1. La recta tangente a la gráfica de f en el punto P $(x_1, f(x_1))$ es:

i.- la recta que pasa por P y tiene pendiente $m(x_1)$, dada por $m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ si este límite existe.

ii.- la recta $x = x_1$ si

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ es } +\infty \text{ ó } -\infty \text{ y } \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ es } +\infty \text{ ó } -\infty$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto se denomina pendiente de la gráfica en el punto.

La ecuación de la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto dado $(x_1, f(x_1))$ se determina mediante la ecuación $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$, si $f'(x_1)$ existe.

3.- Definición de recta normal a una gráfica. La recta normal a una gráfica en un punto dado es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto. La ecuación de la recta normal a una curva $y = f(x)$ en un punto dado $(x_1, f(x_1))$ se determina mediante la ecuación $y - f(x_1) = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$, si $f'(x_1)$ existe y $f'(x_1) \neq 0$.

4.- Diferenciabilidad y continuidad. Si una función f es diferenciable en un número x_1, entonces f es continua en x_1.

4.1.- Definición de derivada lateral. i.- Si la función f está definida en x_1, entonces la derivada por la derecha de f en x_1, denotada por $f'_+(x_1)$, está definida por

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \Leftrightarrow f'_+(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \text{ si existe el límite.}$$

ii.- Si la función f está definida en x_1, entonces la derivada por la izquierda de f en x_1, denotada por $f'_-(x_1)$, está definida por

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \Leftrightarrow f'_-(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \text{ si existe el límite.}$$

5.- Teoremas sobre diferenciación de funciones algebraicas.

5.1.- Regla de diferenciación de una constante.
Si c es una constante y si $f(x) = c$, entonces $f'(x) = 0$. *La derivada de una constante es cero.*

5.2.- Regla de diferenciación para la función identidad.
si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$

5.3.- Regla de diferenciación de potencias (para potencias con exponentes enteros positivos).
Si n es un entero positivo y si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = n\,x^{n-1}$

5.4.- Regla de diferenciación de potencias (para exponentes racionales).
Si f es la función potencia definida por $f(x) = x^r$, donde r es cualquier número racional, entonces f es diferenciable y $f'(x) = r\,x^{r-1}$. Para obtener $f'(0)$ a partir de esta fórmula, r debe ser un número tal que x^{r-1} esté definido en algún intervalo abierto que contenga a 0.

5.5.- Regla de diferenciación para el producto de una constante por una función.
Si f es una función, c es una constante y g es la función definida por $g(x) = c\,f(x)$, entonces $g'(x) = c\,f'(x)$ si $f'(x)$ existe. *La derivada de la multiplicación de una constante por una función es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función.*

5.6.- Regla de diferenciación para la suma.
Si f y g son funciones y si h es la función definida por $h(x) = f(x) + g(x)$, entonces $h'(x) = f'(x) + g'(x)$ si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen. *La derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus derivadas si estas derivadas existen.* En general, la derivada de la suma de un número finito de funciones es igual a la suma de sus derivadas si estas derivadas existen.

5.7.- Regla de diferenciación para el producto.
Si f y g son funciones y si h es la función definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, entonces $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen. *La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera por la segunda función sin derivar más la primera función sin derivar por la derivada de la segunda si estas derivadas existen.*

5.8.- Regla de diferenciación para el cociente.
Si f y g son funciones y si h es la función definida por $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, donde $g(x) \neq 0$ entonces $h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen. *Siendo el numerador la primera función, y el denominador la segunda función, tenemos que la derivada del cociente de dos funciones es igual a la fracción que tiene como numerador a la derivada de la primera por la segunda sin derivar menos la primera sin derivar por la derivada de la segunda, si estas derivadas existen y como su denominador el cuadrado de la segunda.*

5.9.- Regla de la cadena.
Si y es una función de u, definida por $y = f(u)$ y $\frac{dy}{du}$ existe, y si u es una función de x, definida por $u = g(x)$ y $\frac{du}{dx}$ existe, entonces y es una función de x y $\frac{dy}{dx}$ existe la cual está dada por $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

6.- Derivadas de funciones paramétricas.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt} \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx/dt}.$$

7.- Derivadas de orden superior.
Si la función f es diferenciable, entonces su derivada f' se llama, en ocasiones, primera derivada de f o primera función derivada. Si la función f' es diferenciable, entonces la derivada de f' se denomina segunda derivada de f o segunda función derivada. La segunda derivada de f se denota por f'' (que se lee "f biprima"). De la misma manera, la tercera derivada de f o tercera función derivada, está definida como la derivada de f'', suponiendo que la derivada de f'' existe. La tercera derivada de f se representa por f''' (lo cual se lee como "f triprima"). La enésima derivada de la función f, donde n es un número entero mayor que 1, es la derivada de la $(n-1)$-ésima derivada de f. La n-ésima derivada se denota por $f^{(n)}$. De modo que si $f^{(n)}$ es la n-ésima derivada, entonces se puede representar la función

[1] En el siglo XVII Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) y Sir Isaac Newton (1642 – 1727), trabajando de manera independiente, dieron a conocer casi simultáneamente la derivada. El concepto de límite, como se conoce actualmente, fue desconocido por Leibniz y Newton.

[2] El uso del símbolo f' para la derivada de la función f fue introducido por el matemático francés Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) en el siglo XVIII. Esta notación destaca que la función f' se deriva (o proviene) de la función f y su valor en x es $f'(x)$.

misma como $f^{(0)}$. La primera y todas las derivadas de orden superior de y con respecto a x en general se denotan por uno de los tipos de notación siguientes:

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	…..	$f^{(n)}(x)$
y'	y''	y'''	…..	$y^{(n)}$
$\dfrac{dy}{dx}$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$	$\dfrac{d^3y}{dx^3}$	…..	$\dfrac{d^ny}{dx^n}$

8.- Derivadas de las funciones trigonométricas.

8.1.- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{sen}\,x) = \cos x$

8.2.- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{sen}\,u) = \cos u\dfrac{du}{dx}$

8.3.- $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\mathrm{sen}\,x$

8.4.- $\dfrac{d}{dx}(\cos u) = -\mathrm{sen}\,u\dfrac{du}{dx}$

8.5.- $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

8.6.- $\dfrac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\dfrac{du}{dx}$

8.7.- $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

8.8.- $\dfrac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\dfrac{du}{dx}$

8.9.- $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$

8.10.- $\dfrac{d}{dx}(\sec u) = \sec u\tan u\dfrac{du}{dx}$

8.11.- $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x\cot x$

8.12.- $\dfrac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u\cot u\dfrac{du}{dx}$

9.- Derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

9.1.- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{sen}^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9.2.- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{sen}^{-1}u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

9.3.- $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

9.4.- $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}u) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

9.5.- $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

9.6.- $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}u) = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

9.7.- $\dfrac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

9.8.- $\dfrac{d}{dx}(\csc^{-1}u) = \dfrac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

9.9.- $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

9.10.- $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1}u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

9.11.- $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$

9.12.- $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1}u) = \dfrac{-1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

10.- Derivada de la función logarítmica de base *a*.

10.1 $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = (\log_a e)\dfrac{1}{x}$

10.2 $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{\ln a}\dfrac{1}{x}$

10.3 $\dfrac{d}{dx}(\log_a u) = (\log_a e)\dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$

10.4 $\dfrac{d}{dx}(\log_a u) = \dfrac{1}{\ln a}\dfrac{u'}{u}$

11.- Derivada de la función logaritmo natural.

11.1.- $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

11.2.- $\dfrac{d}{dx}(\ln u) = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$

12.- Derivada de la función exponencial de base *a*.

12.1.- $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x\ln a$

12.2.- $\dfrac{d}{dx}(a^u) = a^u\ln a\dfrac{du}{dx}$

13.- Derivada de la función exponencial natural.

13.1.- $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

13.2.- $\dfrac{d}{dx}(e^u) = e^u\dfrac{du}{dx}$.

14.- Derivadas de las funciones hiperbólicas.

14.1.- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{senh}\,x) = \cosh x$

14.2.- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{senh}\,u) = \cosh u\dfrac{du}{dx}$

14.3.- $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \mathrm{senh}\,x$

14.4.- $\dfrac{d}{dx}(\cosh u) = \mathrm{senh}\,u\dfrac{du}{dx}$

14.5.- $\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \mathrm{sech}^2 x$

14.6.- $\dfrac{d}{dx}(\tanh u) = \mathrm{sech}^2 u\dfrac{du}{dx}$

14.7.- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{csch}\,x) = -\mathrm{csch}\,x\coth x$

14.8.- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{csch}\,u) = -\mathrm{csch}\,u\coth u\dfrac{du}{dx}$

14.9.- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{sech}\,x) = -\mathrm{sech}\,x\tanh x$

14.10.- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{sech}\,u) = -\mathrm{sech}\,u\tanh u\dfrac{du}{dx}$

14.11.- $\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -\mathrm{csch}^2 x$

14.12.- $\dfrac{d}{dx}(\coth u) = -\mathrm{csch}^2 u\dfrac{du}{dx}$

15.- Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas.

15.1.- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{senh}^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

15.2.- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{senh}^{-1}u) = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}\dfrac{du}{dx}$

15.3.- $\dfrac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

15.4.- $\dfrac{d}{dx}(\cosh^{-1}u) = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

15.5.- $\dfrac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

15.6.- $\dfrac{d}{dx}(\tanh^{-1}u) = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx}$

15.7.- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{csch}^{-1}x) = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$

15.8.- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{csch}^{-1}u) = \dfrac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx}$

15.9.- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{sech}^{-1}x) = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{1-x^2}}$

15.10.- $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{sech}^{-1}u) = \dfrac{-1}{|u|\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

15.11.- $\dfrac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

15.12.- $\dfrac{d}{dx}(\coth^{-1}u) = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx}$

16. Derivadas notables.

$$\frac{d}{dx}(x^n e^{\alpha x}\cos\beta x) = n x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x + \alpha x^n e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta x^n e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x$$

$$\frac{d}{dx}(x^n e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x) = n x^{n-1}e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x + \alpha x^n e^{\alpha x}\cos\beta x + \beta x^n e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x$$

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**

El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
https://www.tutoruniversitario.com/ Puerto La Cruz, abril de 2026.