MOVIMIENTO OSCILATORIO

1.- Sistema masa - resorte.

1.1.- Ley de Hooke.

$F_s = -k\,x$

1.2.- Ecuación de movimiento.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

1.3.- Posición de la partícula (elongación) en función del tiempo.

Solución general de la ecuación diferencial:

$x\,(t) = c_1 \cos(\omega\, t) + c_2 \cos(\omega\, t)$

$x\,(t) = A \cos(\omega\, t + \phi)$, $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$, $\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega\, x_0}\right)$

Elongación máxima: A

1.4.- Frecuencia angular natural.

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega = 2\,\pi\, f$$

1.5.- Periodo.

1.6.- Frecuencia.

Periodo: Es el tiempo que emplea el móvil en completar un ciclo.

Frecuencia: Es el número de ciclos que da el móvil en cada unidad de tiempo.

n = número de ciclos, t = tiempo.

$$T = \frac{t}{n} \qquad f = \frac{n}{t}$$

$$T = \frac{1}{f} \qquad f = \frac{1}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

1.7.- Rapidez de la partícula en función del tiempo.

$v\,(t) = -\,\omega\, A \,\text{sen}\,(\omega\, t + \phi)$

Rapidez máxima: $v_{max} = \omega\, A$

1.8.- Aceleración de la partícula en función del tiempo.

$a\,(t) = -\,\omega^2 A \cos(\omega\, t + \phi)$

Aceleración máxima: $a_{max} = \omega^2 A$

1.9.- Relación entre la rapidez y la posición.

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

1.10.- Relación entre la aceleración y la posición.

$a = -\,\omega^2\, x$

1.11.- Relación entre la aceleración y la rapidez.

$$a = \omega\sqrt{\omega^2 A^2 - v^2}$$

2.- Péndulo.

2.1.- Ecuación de movimiento.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

2.2.- Frecuencia angular natural.

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

2.3.- Periodo.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

2.4.- Frecuencia.

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

3.- Circuitos LC.

3.1.- Ecuación de movimiento.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

3.2.- Carga eléctrica en función del tiempo.

$q\,(t) = Q \cos(\omega\, t + \phi)$

Carga máxima: Q, $Q_{max} = C\,\varepsilon$

3.3.- Corriente en función del tiempo.

$I\,(t) = -\,\omega\, Q \,\text{sen}\,(\omega\, t + \phi)$

Corriente máxima: $I_{max} = \omega\, Q_{max}$

3.4.- Frecuencia angular natural.

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

3.5.- Periodo.

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

3.6.- Frecuencia.

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

4.- Energía.

4.1 Energía potencial.

$$E_p = \tfrac{1}{2}k\,x^2 \qquad E_p = \tfrac{1}{2}k\,A^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

4.2 Energía cinética.

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad E_c = \tfrac{1}{2}m\,A^2\varpi^2\text{sen}^2(\omega t + \phi)$$

4.3 Energía mecánica.

$$E = \tfrac{1}{2}k\,A^2$$

5.- Movimiento amortiguado.

5.1 Ecuación de movimiento.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,\quad \lambda = \frac{\beta}{2m} \text{ y } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

6.- Circuito LRC.

6.1 Ecuación de movimiento.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0,\quad \lambda = \frac{R}{2L} \text{ y } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

7.- Sistema críticamente amortiguado ($\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$).

7.1.- Posición de la partícula (elongación) en función del tiempo.

Solución general de la ecuación diferencial:

$x\,(t) = (c_1 + c_2\, t)\, e^{-\lambda t}$

7.2.- Conocida la posición inicial y la rapidez inicial.

$x\,(t) = e^{-\lambda t}\,[x_0 + (v_0 + x_0\,\lambda)\, t]$

7.3.- Rapidez de la partícula en función del tiempo.

$v\,(t) = e^{-\lambda t}\,[v_0 - (v_0 + x_0\,\lambda)\,\lambda\, t]$

7.4.- Tiempo en el cual el objeto pasa por el punto de equilibrio.

$$t=-\frac{x_0}{v_0+x_0\lambda}$$

7.5.- Tiempo en el cual el objeto alcanza la elongación máxima.

$$t=\frac{v_0}{\lambda\,(v_0+x_0\lambda)}$$

7.6.- Constante de amortiguamiento crítica.

Si la *constante de amortiguamiento* β crece gradualmente, la frecuencia angular ω disminuye hasta hacerse igual a cero en el valor crítico.

$\beta_c = 2\ m\ \omega_0$

8.- Sistema sobreamortiguado ($\lambda^2 - \omega_0^2 > 0$).

8.1.- Posición de la partícula (elongación) en función del tiempo.

Solución general de la ecuación diferencial:

$$x(t)=e^{-\lambda t}\left(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t}+c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t}\right)$$

8.2.- Conocida la posición inicial y la rapidez inicial.

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{-\lambda t}\left[\left(x_0+\frac{v_0+x_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}}\right)e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t}+\left(x_0-\frac{v_0+x_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}}\right)e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t}\right]$$

8.3.- Rapidez de la partícula en función del tiempo.

$$v(t)=\frac{1}{2}e^{-\lambda t}\left[\left(v_0-\frac{x_0\omega_0^2+v_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}}\right)e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t}+\left(v_0+\frac{x_0\omega_0^2+v_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}}\right)e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t}\right]$$

8.4.- Tiempo en el cual el objeto pasa por el punto de equilibrio.

$$t=\frac{1}{2\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}}\ln\left[\frac{v_0+x_0(\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})}{v_0+x_0(\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})}\right]$$

8.5.- Tiempo en el cual el objeto alcanza la elongación máxima.

$$t=\frac{1}{2\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}}\ln\left[\frac{x_0\omega_0^2+v_0(\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})}{x_0\omega_0^2+v_0(\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})}\right]$$

9.- Sistema subamortiguado ($\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$).

9.1.- Posición de la partícula (elongación) en función del tiempo.

Solución general de la ecuación diferencial:

$x\ (t) = c_1\ e^{-\lambda t} \cos\ (\omega\ t) + c_2\ e^{-\lambda t}\ \mathrm{sen}\ (\omega\ t)$

$$x\ (t) = A\ e^{-\lambda t}\cos\ (\omega\ t+\phi)\ ,\quad A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0+x_0\lambda}{\omega}\right)^2}\ ,\quad \phi=\tan^{-1}\left(-\frac{v_0+x_0\lambda}{x_0\omega}\right)$$

9.2.- Amplitud del movimiento.

$A\ (t) = A_0\ e^{-\lambda t}$

9.2.- Conocida la posición inicial y la rapidez inicial.

$$x(t)=e^{-\lambda t}\left[x_0\cos(\omega t)+\frac{v_0+x_0\lambda}{\omega}\mathrm{sen}\,(\omega t)\right]$$

$$v(t)=e^{-\lambda t}\left[v_0\cos(\omega t)+\frac{x_0(\omega^2-\lambda^2)-v_0\lambda}{\omega}\mathrm{sen}\,(\omega t)\right]$$

9.3.- Tiempo en el cual el objeto pasa por el punto de equilibrio.

$$t=\frac{1}{\omega}\tan^{-1}\left(-\frac{x_0\omega}{v_0+x_0\lambda}\right)$$

Si el valor de t resultare negativo, se ajusta sumándole π/ω hasta que sea positivo.

9.4.- Tiempo en el cual el objeto alcanza la elongación máxima.

$$t=\frac{1}{\omega}\tan^{-1}\left[-\frac{v_0\,\omega}{x_0(\omega^2-\lambda^2)-v_0\lambda}\right]$$

Si el valor de t resultare negativo, se ajusta sumándole π/ω hasta que sea positivo.

9.5.- Constante de tiempo o tiempo de extinción (τ).

La constante de tiempo, o tiempo de extinción es el tiempo necesario para que la energía disminuya en un factor e^{-1}.

$$\tau=\frac{m}{\beta}$$

9.6.- Factor de calidad.

Un oscilador amortiguado se describe normalmente por su factor Q (o factor de calidad):

$Q = \omega_0\tau$

9.7.- Frecuencia angular en función del factor de calidad.

$$\omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

10.- Oscilaciones forzadas.

10.1.- Ecuación de movimiento.

$$\frac{d^2x}{dt}+\frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\cos\omega_f t$$

10.2 Amplitud.

$$A=\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2-\omega_0^2)^2+\left(\frac{\beta\,\omega_f}{m}\right)^2}}$$

11.- Resonancia.

11.1.- Condiciones para un sistema resonante.

$\beta \to 0$

$\omega_f \approx \omega_0$

12.- Energía en el oscilador amortiguado.

$$E(t)=E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

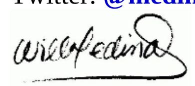
$$E(t)=\tfrac{1}{2}m\omega^2A_0^2e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.

Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**

e-mail: **medinawj@gmail.com**

Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:

https://www.tutoruniversitario.com/ Puerto La Cruz, diciembre de 2025.