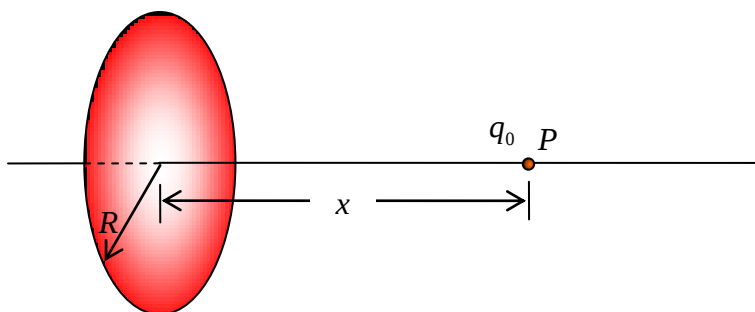


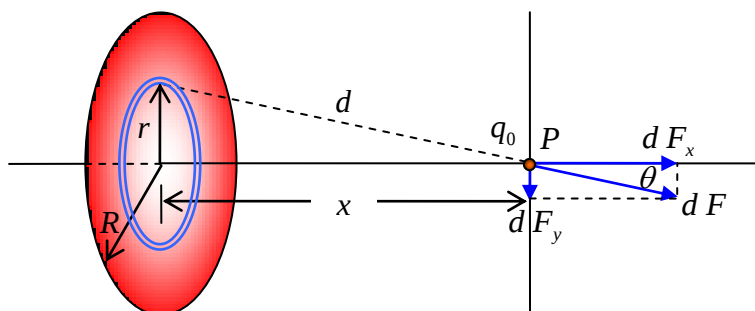
Ejemplo 18. Capítulo 1 del Córdova. Página 32.

Un sistema se componen de un disco de radio R cargado con densidad de carga $\sigma = \beta r$, donde β es una constante y r es medido desde el centro del disco y una carga puntual positiva q_0 situada a una distancia x desde el centro. Determine la fuerza que ejerce el disco sobre la carga puntual.



Solución.

Se considera un elemento diferencial de carga ($d q$) sobre el disco. En este caso es un anillo diferencial. La influencia que ejerce dicho elemento sobre la carga q_0 colocada en el punto P es de repulsión, con un diferencial de fuerza eléctrica $d F$ (orientado con un ángulo θ respecto a la horizontal). $d F$ se descompone en sus componentes rectangulares $d F_x$ y $d F_y$.



Componentes rectangulares de la fuerza eléctrica.

Componente horizontal.

$$d F_x = d F \cos \theta$$

$$\int d F_x = \int d F \cos \theta$$

$$F_x = \int d F \cos \theta$$

Componente vertical.

$$d F_y = d F \sen \theta$$

$$\int d F_y = \int d F \sen \theta$$

$$F_y = \int d F \sen \theta$$

Por simetría $F_y = 0$

El diferencial de la fuerza eléctrica viene dado por:

$$d F = k \frac{q_0 d q}{d^2}$$

Componente horizontal de la fuerza eléctrica.

$$F_x = \int_0^q k \frac{q_0 d q}{d^2} \cos \theta$$

$$F_x = k q_0 \int_0^q \frac{d q}{d^2} \cos \theta$$

Para determinar el diferencial de carga, recurrimos a la definición de densidad superficial de carga:

$$\sigma = \frac{q}{A}$$

Al despejar la carga:

$$q = \sigma A$$

Al diferenciar con respecto a la superficie A :

$$d q = \sigma d A$$

Por tratarse de un disco, su superficie es:

$$A = \pi r^2$$

Al diferenciar con respecto al radio r :

$$d A = 2 \pi r d r$$

La densidad superficial de carga está dada por:

$$\sigma = \beta r$$

Al sustituir σ y $d A$ en el diferencial de carga $d q$:

$$d q = \beta r \times 2 \pi r d r$$

$$dq = 2\pi\beta r^2 dr$$

Distancia entre el elemento diferencial de carga (dq) y la carga q_0 .

$$d^2 = x^2 + r^2$$

$$d = \sqrt{x^2 + r^2}$$

Ángulo que forma el diferencial de la fuerza eléctrica (dF) con la horizontal.

$$\cos\theta = \frac{x}{d}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

Al sustituir dq , d y $\cos\theta$ en la expresión de la fuerza eléctrica:

$$F_x = kq_0 \int_0^R \frac{2\pi\beta r^2 dr}{x^2 + r^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

$$F_x = 2\pi\beta kq_0 x \int_0^R \frac{r^2 dr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La integración conduce a:

$$F_x = 2\pi\beta kq_0 x \left[\ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + r^2} + r}{x} \right| - \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right] \Bigg|_0^R$$

$$F_x = 2\pi\beta kq_0 x \left(\ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + R^2} + R}{x} \right| - \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$F_x = 2\pi\beta \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) q_0 x \left(\ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + R^2} + R}{x} \right| - \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\beta q_0 x}{2\epsilon_0} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + R^2} + R}{x} \right| - \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \mathbf{i} \text{ Unidades de fuerza.}$$

Comentario del autor.

La respuesta proporcionada por el Profesor Córdova en este ejercicio es:

$$\mathbf{F} = \frac{\beta q_0 x}{4\pi \varepsilon_0} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + R^2} + R}{x} \right| - \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \mathbf{i}$$

La cual tiene un error, y es que en el paso previo de la solución, al resolver la integral doble

$\mathbf{F} = \frac{q_0 \beta x}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r^2 d\theta dr}{(r^2 + x^2)} \mathbf{i}$ no incluyó el factor 2π que resulta de resolver la integral interna.

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **La Ley de Coulomb, Distribuciones continuas de carga en Discos**, perteneciente a la asignatura **Física, Electricidad**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, así como asesoría personalizada, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: medinawj@gmail.com

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.