ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR.

1.- Ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.

La ecuación diferencial $a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = F(x)$ recibe el nombre de ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. Si $F(x) = 0$, la ecuación es homogénea; en caso contrario es no homogénea.

2.- Independencia lineal.

Se dice que las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, son linealmente independientes si la *única* solución de la ecuación $C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + \ldots + C_n\, y_n = 0$ es $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$. Un conjunto de funciones que no son linealmente independientes se denomina linealmente dependiente.

3.- El Wronskiano.

3.1.- Definición de Wronskiano.

Se define el Wronskiano $w(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de un conjunto de n funciones como el determinante

$$w(y_1, y_2, \ldots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

3.2.- Criterio del Wronskiano para dependencia lineal.

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden n.

i.- Si $w(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$, las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, son *linealmente independientes* por lo menos en algún punto del intervalo.

ii.- Si $w(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$, las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, son *linealmente dependientes* para todo punto del intervalo.

4.- Solución general de una ecuación lineal homogénea (Principio de superposición).

Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones independientes de la ecuación diferencial $a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = 0$ entonces la solución general está dada por $y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + \ldots + C_n\, y_n$ siendo $C_1, C_2, \ldots, C_n$, constantes arbitrarias.

5.- Método de reducción de orden.

Para resolver $y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0$ dada una solución conocida $y_1(x)$, una segunda solución se obtiene a partir de $y_2(x) = y_1(x)\int \dfrac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx$ (Teorema de Abel).

6.- Ecuación característica.

En general, para resolver una ecuación diferencial de orden n $a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = 0$ en donde los a_i, siendo $i = 0, 1, \ldots, n$, son constantes reales, se toma el operador $(a_n\, D^n + a_{n-1}\, D^{n-1} + \ldots + a_1\, D + a_0)\, y = 0$, cambiar "$D$" por "$m$" y se debe resolver una ecuación polinomial de grado n: $a_n\, m^n + a_{n-1}\, m^{n-1} + \ldots\, a_2\, m^2 + a_1\, m + a_0$. Esta última ecuación se llama ecuación auxiliar o ecuación característica de la ecuación diferencial.

7.- Soluciones generales de $y'' + a\, y' + b\, y = 0$.

i.- Caso I (Raíces reales diferentes):

Si $m_1 \neq m_2$ son raíces diferentes de la ecuación característica, la solución general es entonces $y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$.

ii.- Caso II (Raíces reales iguales):

Si $m_1 = m_2$ son raíces iguales de la ecuación característica, entonces la solución general es $y = C_1 e^{m_1 x} + C_2\, x\, e^{m_1 x} = (C_1 + C_2 x)\, e^{m_1 x}$.

iii.- Caso III (Raíces complejas):

Si $m_1 = \alpha + \beta\, \mathrm{i}$ y $m_2 = \alpha - \beta\, \mathrm{i}$ son raíces complejas de la ecuación característica, entonces la solución general es $y = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$.

8.- Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes no homogéneas.

8.1- Solución general de una ecuación lineal no homogénea.

Sea $a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = F(x)$ una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$. Si y_p es una solución particular de esta ecuación no homogénea y y_h la solución general de la correspondiente ecuación homogénea, entonces $y = y_h + y_p$ es la solución general de la ecuación no homogénea.

8.2.- Método de los coeficientes indeterminados (Familia).

$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = F(x)$

i.- Obtener y_h, solución general de la ecuación homogénea que resulta de hacer $F(x) = 0$.

ii.- Utilizar $F(x)$ para determinar la forma de la solución particular y_p. Véase la tabla siguiente:

Término en $F(x)$	Términos correspondientes en y_p
C (Constante)	A
$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + a_k x^k$	$A_0 + A_1 x + \ldots + A_{k-1}x^{k-1} + A_k x^k$
$C\,e^{m x}$	$A\,e^{m x}$
$C\,x^k e^{m x}$	$(A_0 + A_1 x + \ldots + A_{k-1}x^{k-1} + A_k x^k)\,e^{m x}$
$C\cos\beta x$ ó $C\,\mathrm{sen}\,\beta x$	$A\cos\beta x + B\,\mathrm{sen}\,\beta x$
$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + a_k x^k)\cos\beta x$ $(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + a_k x^k)\,\mathrm{sen}\,\beta x$	$(A_0 + \ldots + A_k x^k)(A\cos\beta x + B\,\mathrm{sen}\,\beta x)$
$C\,e^{m x}\cos\beta x$ ó $C\,e^{m x}\,\mathrm{sen}\,\beta x$	$e^{m x}(A\cos\beta x + B\,\mathrm{sen}\,\beta x)$

iii.- Si un término de y_p coincide con un término de y_h, multiplicar el término en y_p por la mínima potencia de x que evita la duplicación.

iv.- Sustituir y_p y sus derivadas en la ecuación no homogénea y despejar los coeficientes.

v.- Formar la solución general $y = y_h + y_p$.

8.3.- Operadores Diferenciales.

Término en $F(x)$	Operador anulador.
C (Constante)	D
$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + a_k x^k$	D^{k+1}
$C\,e^{\alpha x}$	$D - \alpha$
$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + a_k x^k)\,e^{\alpha x}$	$(D - \alpha)^{k+1}$
$C\cos\beta x$ ó $C\,\mathrm{sen}\,\beta x$	$D^2 + \beta^2$
$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + a_k x^k)\cos\beta x$ $(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + a_k x^k)\,\mathrm{sen}\,\beta x$	$(D^2 + \beta^2)^{k+1}$
$C\,e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $C\,e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x$	$D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)$
$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + a_k x^k)\,e^{\alpha x}\cos\beta x$ $(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + a_k x^k)\,e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\beta x$	$[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^{k+1}$

8.4.- Método de variación de los parámetros.

$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = F(x)$.

Métodos de solución.

Primer método.

i.- Hallar la solución general y_h de la ecuación homogénea: $y_h = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + \ldots + C_n\, y_n$

ii.- Reemplazar las constantes de y_h por variables, a fin de obtener y_p: $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \ldots + v_n y_n$.

iii.- Resolver el siguiente sistema, despejando las variables $v_1', v_2', \ldots, v_n'$:

$$\begin{aligned}
&v_1' y_1 + v_2' y_2 + \ldots + v_n' y_n = 0\\
&v_1' y_1' + v_2' y_2' + \ldots + v_n' y_n' = 0\\
&v_1' y_1'' + v_2' y_2'' + \ldots + v_n' y_n'' = 0\\
&\;\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
&v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + v_n' y_n^{(n-1)} \ldots = F(x)
\end{aligned}$$

iv.- Integrar para hallar v_1, v_2, ..., v_n.

v.- Formar la solución general: $y = y_h + y_p$.

La solución del sistema de ecuaciones para ecuaciones diferenciales de segundo y tercer orden es:

Segundo orden.

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ F(x) & y_2' \end{vmatrix}}{w(y_1, y_2, \ldots y_n)}\;;\; v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & F(x) \end{vmatrix}}{w(y_1, y_2, \ldots y_n)}$$

Tercer orden.

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ F(x) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}}{w(y_1, y_2, \ldots y_n)}\;;\; v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & F(x) & y_3'' \end{vmatrix}}{w(y_1, y_2, \ldots y_n)}\;;\; v_3' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & F(x) \end{vmatrix}}{w(y_1, y_2, \ldots y_n)}$$

Segundo método.

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \int \frac{w_k(x) F(x)}{w(y_1, y_2, \ldots y_n)}\, dx\,,\; w_k = (-1)^{n-k}\, w(y_1, y_2, \ldots y_n)$$

9.- Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables.

9.1- Ecuación de Cauchy – Euler.

Una ecuación diferencial de la forma $a_n x^n \dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 x \dfrac{dy}{dx} + a_0 y = F(x)$ en donde a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 son constantes, se llama ecuación de Cauchy-Euler o ecuación equidimensional. La característica obvia de este tipo de ecuación es que el *grado* de los coeficientes polinomiales x^k es igual al orden de derivación en los términos $\dfrac{d^k y}{dx^k}$, para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Para precisar el estudio, fijaremos nuestra atención sobre la resolución de la ecuación homogénea de segundo orden $a x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + b x \dfrac{dy}{dx} + c y = 0\cdot$

La solución de ecuaciones de orden superior se encuentra de forma análoga. Además, podemos resolver la ecuación no homogénea $a x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + b x \dfrac{dy}{dx} + c y = F(x)$ mediante variación de parámetros, una vez que hayamos determinado la función complementaria y_h (x). Al resolver $a x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + b x \dfrac{dy}{dx} + c y = F(x)$ mediante el método de variación de parámetros, se debe escribir la ecuación en la forma $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + \dfrac{b}{a x} \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{c}{a x^2} y = \hat{F}(x)$, donde $\hat{F}(x) = \dfrac{F(x)}{a x^2}$

9.2.- Método de solución.

Probamos una solución de la forma $y = x^m$, donde m debe ser determinada. Las derivadas de la función $y = x^m$ son:

$$y' = m x^{m-1},\; y'' = m(m-1) x^{m-2} = (m^2 - m) x^{m-2},\; y''' = m(m-1)(m-2) x^{m-3} = (m^3 - 3m^2 + 2m) x^{m-3}$$

$y = x^m$ será solución de la ecuación diferencial cada vez que m sea solución de la **ecuación auxiliar** $a\, m\,(m-1) + b\, m + c = 0$ o bien $a\, m^2 + (b - a)\, m + c = 0$.

Hay que considerar tres casos diferentes dependiendo de si las raíces de esta ecuación cuadrática son reales y distintas, reales e iguales, o complejas conjugadas.

i.- Caso I (Raíces reales diferentes):

Si $m_1 \neq m_2$ son raíces diferentes de la ecuación característica, la solución general es entonces $y = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$.

ii.- Caso II (Raíces reales iguales):

Si $m_1 = m_2$ son raíces iguales de la ecuación característica, entonces la solución general es $y = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_1} \ln x = (C_1 + C_2 \ln x)\, x^{m_1}$.

iii.- Caso III (Raíces complejas):

Si $m_1 = \alpha + \beta$ i y $m_2 = \alpha - \beta$ i son raíces complejas de la ecuación característica, entonces la solución general es $y = x^{\alpha}[C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta \ln x)]$.

Para una ecuación de tercer orden $a x^3 \dfrac{d^3 y}{dx^3} + b x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + c x \dfrac{dy}{dx} + k y = 0$, la ecuación auxiliar es

$a\, m^3 + (b - 3\, a)\, m^2 + (2\, a + c - b)\, m + k = 0.$

9.3.- Cambio de variable.

La sustitución $x = e^t$ permite convertir la ecuación diferencial de Cauchy-Euler $a_n x^n \dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 x \dfrac{dy}{dx} + a_0 y = 0$ en una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes.

Las tres primeras derivadas requeridas son:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} = e^{-3t}\left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

Si la ecuación diferencial es de la forma

$$(a x + b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + (a x + b)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + (a x + b) \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

El cambio de variable correspondiente es $a\, x + b = e^t$. Las tres primeras derivadas requeridas son:

$$\frac{dy}{dx} = a\, e^{-t} \frac{dy}{dt} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 e^{-2t}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} = a^3 e^{-3t}\left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

10.- Problema de valor inicial.

Un problema de valor inicial para una ecuación diferencial lineal de orden n es:

Resolver: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = F(x)$ *Sujeta a*: y (x_0) = y_0, $y'(x_0) = y_0'$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ en donde y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ son constantes arbitrarias.

11.- Problema de valores en la frontera.

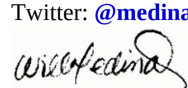
Un problema como: *Resolver*: $a_2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \dfrac{dy}{dx} + a_0(x)\, y = F(x)$ *Sujeta a*: y (a) = y_0, y (b) = y_1 se llama problema de valores de frontera de dos puntos o, simplemente, un problema de valores de frontera.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.

Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**

e-mail: **medinawj@gmail.com**

Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:

https://www.tutoruniversitario.com/ Maturín, diciembre de 2024.