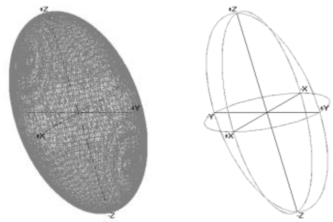
SUPERFICIES EN R^3.

1.- Elipsoide.

En coordenadas cartesianas tridimensionales, la ecuación de la elipsoide de centro en el origen es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, donde *a*, *b* y *c* (números positivos) son los puntos en los cuales corta a los ejes *x*, *y*, *z* respectivamente (semiejes del elipsoide). Si $a = b = c$, el elipsoide es una esfera.



Elipsoide y secciones sobre los planos coordenados.

Secciones del elipsoide.

Secciones en el plano *x y* ($z = 0$): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (Elipse).

Secciones paralelas al plano *x y* ($z = k$): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$

Si $|k| < c$, las secciones transversales son elipses.
Si $|k| = c$, la intersección consiste del único punto $(0,0,c)$.
Si $|k| > c$, el plano $z = k$ no intersecta a la superficie.

Secciones en el plano *x z* ($y = 0$): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (Elipse).

Secciones paralelas al plano *x z* ($y = k$): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}$

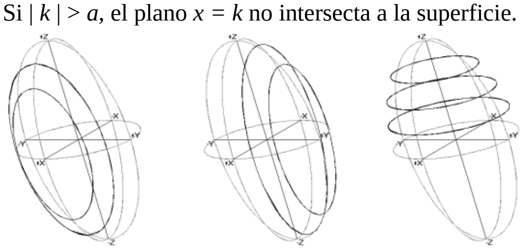
Si $|k| < b$, las secciones transversales son elipses.
Si $|k| = b$, la intersección consiste del único punto $(0,b,0)$.
Si $|k| > b$, el plano $y = k$ no intersecta a la superficie.

Secciones en el plano *y z* ($x = 0$): $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (Elipse).

Secciones paralelas al plano *y z* ($x = k$): $\frac{k^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}$

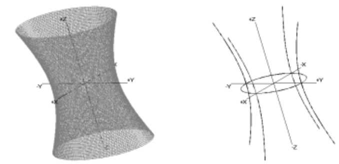
Si $|k| < a$, las secciones transversales son elipses.
Si $|k| = a$, la intersección consiste del único punto $(a,0,0)$.
Si $|k| > a$, el plano $x = k$ no intersecta a la superficie.



Secciones del elipsoide paralelas a los planos coordenados.

2.- Hiperboloide elíptico de una hoja.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. *a*, *b* y *c* son números positivos. La variable cuadrática cuyo coeficiente es negativo representa el eje del hiperboloide elíptico de una hoja.



Hiperboloide elíptico de una hoja y secciones sobre los planos coordenados.

Secciones del hiperboloide elíptico de una hoja.

Secciones en el plano *x y* ($z = 0$): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (Elipse).

Secciones paralelas al plano *x y* ($z = k$): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{k^2}{c^2}=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$ (Elipses).

Secciones en el plano *x z* ($y = 0$): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (Hipérbola).

Secciones paralelas al plano *x z* ($y = k$): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}$ (Hipérbolas).

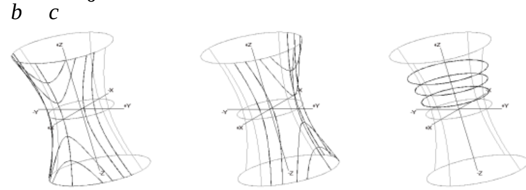
Si $|k| < b$, el eje transverso de la hipérbola es paralelo al eje *x*.
Si $|k| > b$, el eje transverso de la hipérbola es paralelo al eje *z*.
Si $|k| = b$, la hipérbola degenera en dos rectas: $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0$ y $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$

Secciones en el plano *y z* ($x = 0$): $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (Hipérbola).

Secciones paralelas al plano *y z* ($x = k$): $\frac{k^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}$ (Hipérbolas).

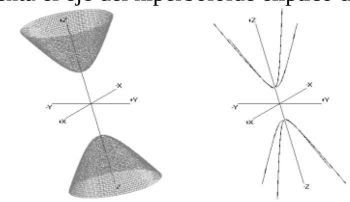
Si $|k| < a$, el eje transverso de la hipérbola es paralelo al eje *y*.
Si $|k| > a$, el eje transverso de la hipérbola es paralelo al eje *z*.
Si $|k| = a$, la hipérbola degenera en dos rectas: $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$ y $\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0$



Secciones del hiperboloide de una hoja paralelas a los planos coordenados.

3.- Hiperboloide elíptico de dos hojas.

$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. *a*, *b* y *c* son números positivos. La variable cuadrática cuyo coeficiente es positivo representa el eje del hiperboloide elíptico de dos hojas.



Hiperboloide elíptico de dos hojas y secciones sobre los planos coordenados.

Secciones del hiperboloide elíptico de dos hojas.

Secciones en el plano *x y* ($z = 0$): $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (No existe lugar geométrico).

Secciones paralelas al plano *x y* ($z = k$): $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}=1$;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1$

Si $|k| < c$, el plano $z = k$ no intersecta a la superficie.
Si $|k| = c$, la intersección consiste del único punto $(0,0,c)$.
Si $|k| > c$, las secciones transversales son elipses.

Secciones en el plano *x z* ($y = 0$): $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (Hipérbola).

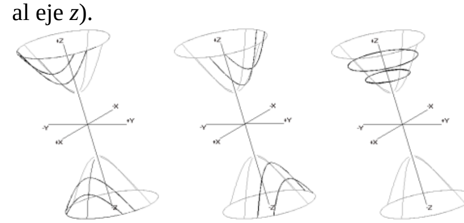
Secciones paralelas al plano *x z* ($y = k$): $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{k^2}{b^2}$ (Hipérbolas cuyos ejes transversos son paralelos al eje z).

Secciones en el plano *y z* ($x = 0$): $-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (Hipérbola).

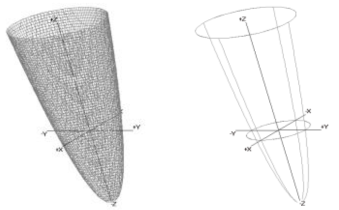
Secciones paralelas al plano *y z* ($x = k$): $-\frac{k^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{k^2}{a^2}$ (Hipérbolas cuyos ejes transversos son paralelos al eje *z*).



Secciones del hiperboloide de dos hojas paralelas a los planos coordenados.

4.- Paraboloide elíptico. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$. a, b son números positivos y $c \neq 0$. La variable lineal representa el eje del paraboloide elíptico.



Paraboloide elíptico y secciones sobre los planos coordenados.

Secciones del paraboloide elíptico.

Secciones en el plano $x\,y$ ($z = 0$): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ [Elipse degenerada en el punto (0,0,0)].

Secciones paralelas al plano $x\,y$ ($z = k$): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k}{c}$

Si k y c tienen el mismo signo, la ecuación corresponde a una elipse.
Si k y c tienen signos opuestos, el plano $z = k$ no intersecta a la superficie.

Secciones en el plano $x\,z$ ($y = 0$): $\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}$ (Parábola).

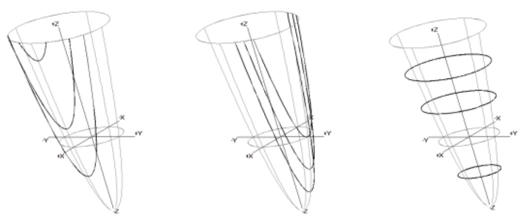
Secciones paralelas al plano $x\,z$ ($y = k$): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ (Parábolas)

Cuando $c > 0$, las parábolas abren hacia arriba; cuando $c < 0$, las parábolas abren hacia abajo.

Secciones en el plano $y\,z$ ($x = 0$): $\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ (Parábola).

Secciones paralelas al plano $y\,z$ ($x = k$): $\frac{k^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ (Parábolas).

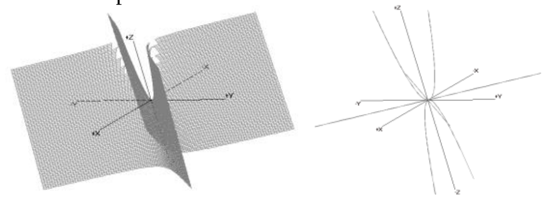
Cuando $c > 0$, las parábolas abren hacia arriba; cuando $c < 0$, las parábolas abren hacia abajo.



Secciones del paraboloide elíptico paralelas a los planos coordenados.

5.- Paraboloide hiperbólico.

Es una superficie de segundo orden de ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$. a, b son números positivos y $c \neq 0$. La variable lineal representa el eje del paraboloide hiperbólico.



Paraboloide hiperbólico y secciones sobre los planos coordenados.

Secciones del paraboloide hiperbólico.

Secciones en el plano $x\,y$ ($z = 0$): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (Hipérbola degenerada en dos rectas: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ y $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$).

Secciones paralelas al plano $x\,y$ ($z = k$): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{k}{c}$ (hipérbolas)

Si k y c tienen el mismo signo, el eje transverso de la hipérbola es paralelo al eje x.
Si k y c tienen signos opuestos, el eje transverso de la hipérbola es paralelo al eje y.

Secciones en el plano $x\,z$ ($y = 0$): $\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}$ (Parábola).

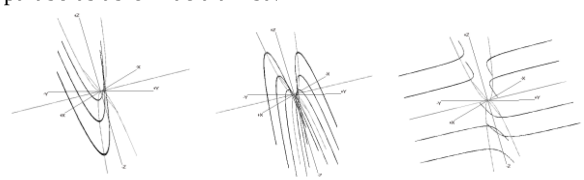
Secciones paralelas al plano $x\,z$ ($y = k$): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ (Parábolas)

Cuando $c > 0$, las parábolas abren hacia arriba; cuando $c < 0$, las parábolas abren hacia abajo.

Secciones en el plano $y\,z$ ($x = 0$): $\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ (Parábola).

Secciones paralelas al plano $y\,z$ ($x = k$): $\frac{k^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ (Parábolas)

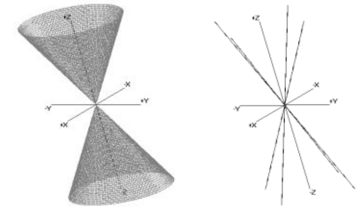
Cuando $c > 0$, las parábolas abren hacia abajo; cuando $c < 0$, las parábolas abren hacia arriba.



Secciones del paraboloide hiperbólico paralelas a los planos coordenados.

6.- Cono elíptico. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$. a, b y c son números positivos.

La variable cuadrática cuyo coeficiente es negativo representa el eje del cono.



Cono elíptico y secciones sobre los planos coordenados.

Secciones del cono elíptico.

Secciones en el plano $x\,y$ ($z = 0$): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ [Elipse degenerada en el punto (0,0,0)].

Secciones paralelas al plano $x\,y$ ($z = k$): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{k^2}{c^2}=0$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}$ (Elipses).

Secciones en el plano $x\,z$ ($y = 0$): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (Hipérbola degenerada en dos rectas: $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0$ y $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$).

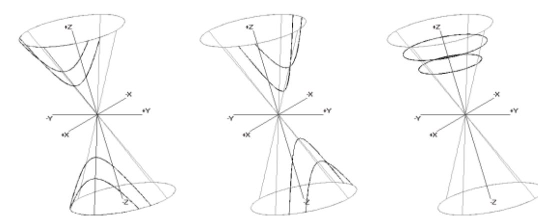
Secciones paralelas al plano $x\,z$ ($y = k$): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{k^2}{b^2}$ (Hipérbolas)

Secciones en el plano $y\,z$ ($x = 0$): $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (Hipérbola degenerada en dos rectas: $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$ y $\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0$).

Secciones paralelas al plano $y\,z$ ($x = k$): $\frac{k^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{a^2}$ (Hipérbolas).



Secciones del cono elíptico paralelas a los planos coordenados.

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**