LA INTEGRAL DEFINIDA.

1.- Propiedades de la notación Σ.

1.1.- $\sum_{i=1}^{n} c\, f(i) = c \sum_{i=1}^{n} f(i)$ c es cualquier constante.

1.2.- $\sum_{i=1}^{n} f(i) \pm g(i) = \sum_{i=1}^{n} f(i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(i)$

2.- Fórmulas de suma.

2.1.- $\sum_{i=1}^{n} c = c\,n$

2.2.- $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2.3.- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2.4.- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

2.5.- $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

3.- Cálculo de áreas mediante sumas de Riemann.

3.1.- Rectángulos inscritos.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$x_{i-1} = a + (i-1)\Delta x$$

3.2.- Rectángulos circunscritos.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$x_i = a + i\,\Delta x$$

Para ambos casos: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

4.- Definición de integral definida.

Sea f definida en el intervalo cerrado $[a,b]$ y sea c un punto del subintervalo $[\ x_{i-1}\ ,\ x_i\ ]$, de anchura Δx_i. Entonces, si $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ existe, denotaremos este límite por $\int_a^b f(x)\,dx$ y lo llamaremos la **integral definida de *f* entre *a* y *b*.**

5.- Teorema fundamental del cálculo.

Si una función f es continua en el intervalo $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ para todo x en $[a,b]$.

6.- Propiedades de la integral definida.

6.1.- $\int_a^b k\, f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, donde k es una constante.

6.2.- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, donde $a < c < b$

6.3.- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

6.4.- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

6.5.- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

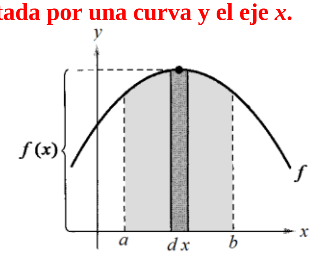
7.- Regla de Leibniz. Derivada de una función integral.

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = f[h(x)]\left(\frac{dh}{dx}\right) - f[g(x)]\left(\frac{dg}{dx}\right)$$

8.- Aplicaciones de la integral definida.

8.1.- Área de una región.

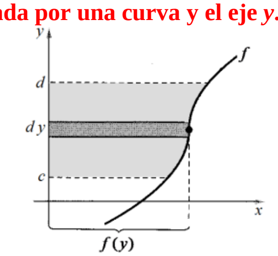
8.1.1- Área limitada por una curva y el eje *x*.



Si f es continua en $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a,b]$, entonces el área de la región limitada por $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ y el eje x es

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (8.1.1)$$

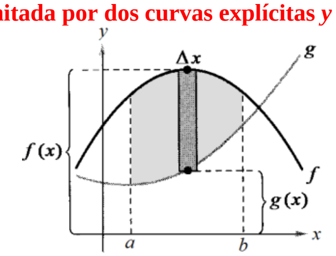
8.1.2.- Área limitada por una curva y el eje *y*.



Si f es continua en $[c,d]$ y $f(y) \geq 0$ para todo y en $[c,d]$, entonces el área de la región limitada por $x = f(y)$, $y = c$, $y = d$ y el eje y es

$$A = \int_c^d f(y)\,dy \qquad (8.1.2)$$

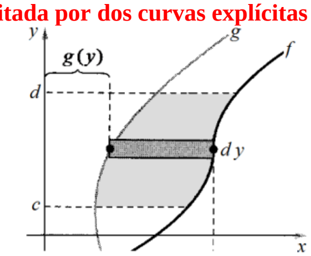
8.1.3.- Área limitada por dos curvas explícitas *y* = *f* (*x*).



Si f y g son continuas en $[a,b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a,b]$, entonces el área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \qquad (8.1.3)$$

8.1.4.- Área limitada por dos curvas explícitas *x* = *f* (*y*).



Si f y g son continuas en $[c,d]$ y $g(y) \leq f(y)$ para todo y en $[c,d]$, entonces el área de la región limitada por $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ y $y = d$ es

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy \qquad (8.1.4)$$

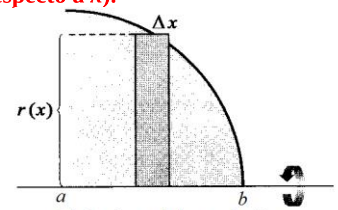
8.2.- Volúmenes de cuerpos de revolución.

Definición de sólido de revolución.

Si una región plana se hace girar alrededor de una recta, el sólido engendrado se llama **sólido de revolución** y la recta se llama **eje de revolución**.

8.2.1.- Método de discos (rectángulos perpendiculares al eje de revolución).

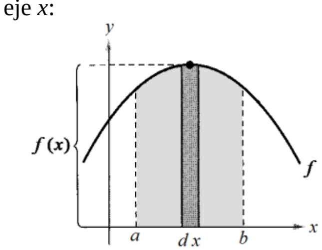
Eje horizontal de revolución, rectángulo diferencial vertical (Integración respecto a *x*).



Eje horizontal de revolución

Si f y g son continuas en $[a,b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a,b]$, entonces el volumen de la región limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$ al girar en un eje de revolución horizontal es $V = \pi\int_a^b [r(x)]^2\,dx$; $r(x)$ es la altura del elemento diferencial (radio).

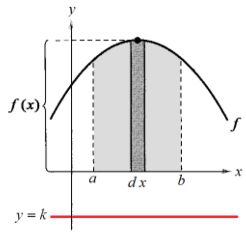
Caso 1. Región limitada por $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ y el eje x. Eje de revolución = El eje x:



$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx \qquad (8.2.1)$$

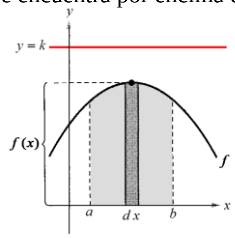
Caso 2. Región limitada por $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ y el eje x. Eje de revolución = La recta $y = k$:

El eje de revolución se encuentra por debajo del área.



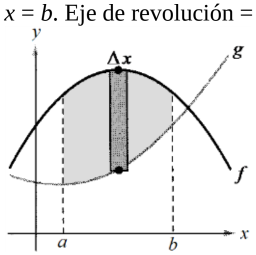
$$V = \pi\int_a^b \{[f(x)-k]^2 - k^2\}\,dx \qquad (8.2.2)$$

El eje de revolución se encuentra por encima del área.



$$V = \pi\int_a^b \{k^2 - [k - f(x)]^2\}\,dx \qquad (8.2.3)$$

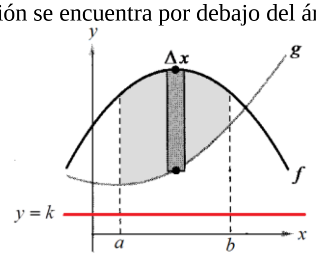
__Caso 3__. Región limitada superiormente por $y = f(x)$, inferiormente por $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$. Eje de revolución = El eje x:



$$V = \pi\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx \qquad (8.2.4)$$

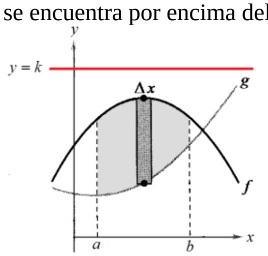
__Caso 4__. Región limitada superiormente por $y = f(x)$, inferiormente por $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$. Eje de revolución = La recta $y = k$:

El eje de revolución se encuentra por debajo del área.



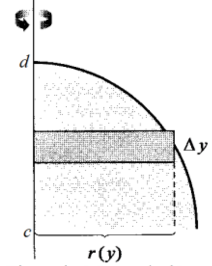
$$V = \pi\int_a^b \{[f(x)-k]^2 - [g(x)-k]^2\}\,dx \qquad (8.2.5)$$

El eje de revolución se encuentra por encima del área.



$$V = \pi\int_a^b \{[k-g(x)]^2 - [k-f(x)]^2\}\,dx \qquad (8.2.6)$$

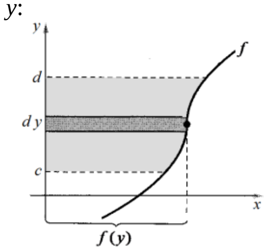
Eje vertical de revolución, rectángulo diferencial horizontal (Integración respecto a y).



Eje vertical de revolución

Si f y g son continuas en $[c,d]$ y $g(y) \le f(y)$ para todo y en $[c,d]$, entonces el volumen de la región limitada por $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ y $y = d$ al girar en un eje de revolución horizontal es $V = \pi\int_c^d [r(y)]^2\,dy$; $r(y)$ es la altura del elemento diferencial (radio).

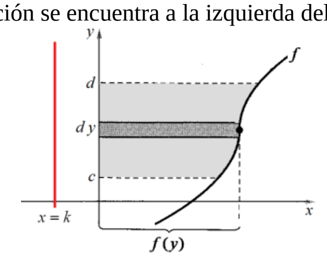
__Caso 5__. Región limitada por $x = f(y)$, $y = c$, $y = d$ y el eje y. Eje de revolución = El eje y:



$$V = \pi\int_c^d [f(y)]^2\,dy \qquad (8.2.7)$$

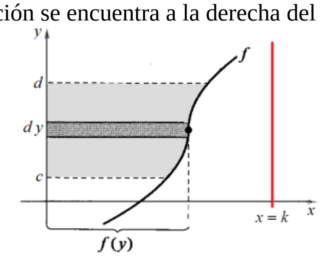
__Caso 6__. Región limitada por $x = f(y)$, $y = c$, $y = d$ y el eje y. Eje de revolución = La recta $x = k$:

El eje de revolución se encuentra a la izquierda del área.



$$V = \pi\int_c^d \{[f(y)-k]^2 - k^2\}\,dy \qquad (8.2.8)$$

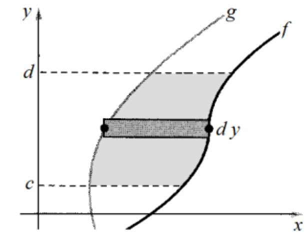
El eje de revolución se encuentra a la derecha del área.



$$V = \pi\int_c^d \{k^2 - [k - f(y)]^2\}\,dy \qquad (8.2.9)$$

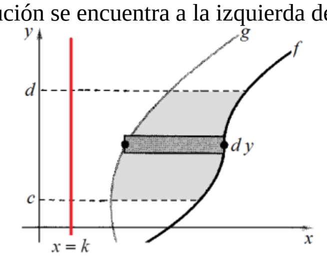
__Caso 7__. Región limitada a la derecha por $x = f(y)$, a la izquierda por $x = g(y)$, $y = c$ y $y = d$. Eje de revolución = El eje y:

$$V = \pi\int_c^d \{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\}\,dy \qquad (8.2.10)$$



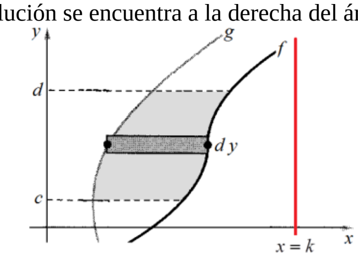
__Caso 8__. Región limitada a la derecha por $x = f(y)$, a la izquierda por $x = g(y)$, $y = c$ y $y = d$. Eje de revolución = La recta $x = k$:

El eje de revolución se encuentra a la izquierda del área.



$$V = \pi\int_c^d \{[f(y)-k]^2 - [g(y)-k]^2\}\,dy \qquad (8.2.11)$$

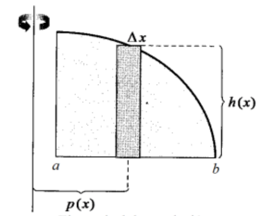
El eje de revolución se encuentra a la derecha del área.



$$V = \pi\int_c^d \{[k-g(y)]^2 - [k-f(y)]^2\}\,dy \qquad (8.2.12)$$

__**8.2.2.- Método de capas (rectángulos paralelos al eje de revolución).**__

Eje vertical de revolución, rectángulo diferencial vertical (Integración respecto a x).

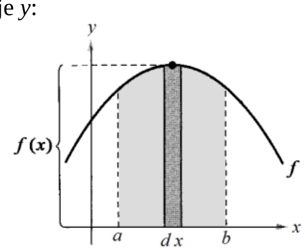


Eje vertical de revolución.

Si f y g son continuas en $[a,b]$ y $g(x) \le f(x)$ para todo x en $[a,b]$, entonces el volumen de la región limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$ al girar en un eje de revolución vertical es

$V = 2\pi\int_a^b r(x)h(x)\,dx$; r (x) es la distancia horizontal entre el rectángulo diferencial y el eje de revolución (radio) y h (x) es la altura del elemento diferencial [h (x) es la diferencia entre la función que limita superiormente menos la función que limita inferiormente al área].

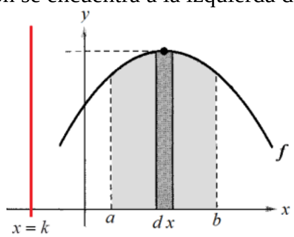
Caso 1. Región limitada por $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ y el eje x. Eje de revolución = El eje y:



$$V = 2\pi\int_a^b x\, f(x)\,dx \qquad (8.2.13)$$

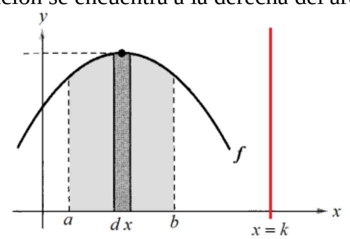
Caso 2. Región limitada por $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ y el eje x. Eje de revolución = La recta $x = k$:

El eje de revolución se encuentra a la izquierda del área.



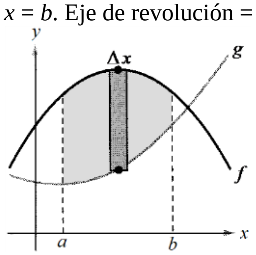
$$V = 2\pi\int_a^b (x-k)\, f(x)\,dx \qquad (8.2.14)$$

El eje de revolución se encuentra a la derecha del área.



$$V = 2\pi\int_a^b (k-x)\, f(x)\,dx \qquad (8.2.15)$$

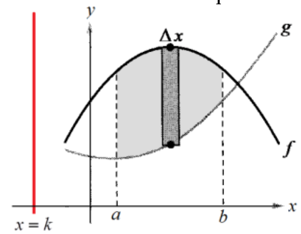
Caso 3. Región limitada superiormente por $y = f(x)$, inferiormente por $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$. Eje de revolución = El eje y:



$$V = 2\pi\int_a^b x[f(x)-g(x)]\,dx \qquad (8.2.16)$$

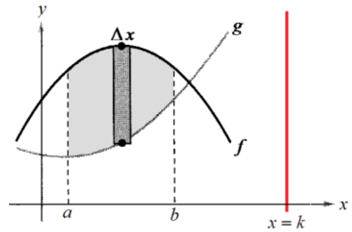
Caso 4. Región limitada superiormente por $y = f(x)$, inferiormente por $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$. Eje de revolución = La recta $x = k$:

El eje de revolución se encuentra a la izquierda del área.



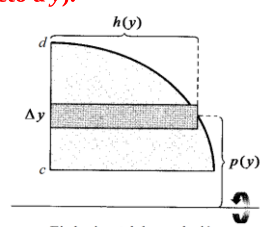
$$V = 2\pi\int_a^b (x-k)[f(x)-g(x)]\,dx \qquad (8.2.17)$$

El eje de revolución se encuentra a la derecha del área.



$$V = 2\pi\int_a^b (k-x)[f(x)-g(x)]\,dx \qquad (8.2.18)$$

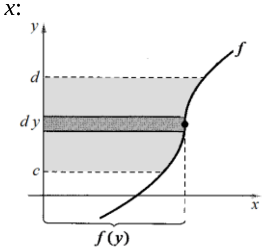
Eje horizontal de revolución, rectángulo diferencial horizontal (Integración respecto a *y*).



Eje horizontal de revolución.

Si f y g son continuas en [c,d] y $g(y) \le f(y)$ para todo y en [c,d], entonces el volumen de la región limitada por $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ y $y = d$ al girar en un eje de revolución horizontal es $V = 2\pi\int_c^d r(y)h(y)\,dy$; r (y) es la distancia vertical entre el rectángulo diferencial y el eje de revolución (radio) y h (y) es la "altura" del elemento diferencial [h (y) es la diferencia entre la función que limita a la derecha menos la función que limita a la izquierda al área].

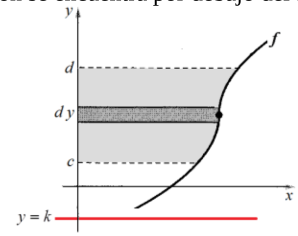
Caso 5. Región limitada por $x = f(y)$, $y = c$, $y = d$ y el eje y. Eje de revolución = El eje x:



$$V = 2\pi\int_c^d y\, f(y)\,dy \qquad (8.2.19)$$

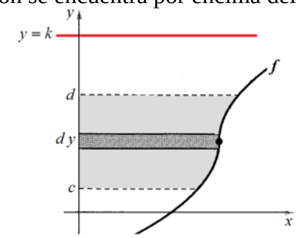
Caso 6. Región limitada por $x = f(y)$, $y = c$, $y = d$ y el eje y. Eje de revolución = La recta $y = k$:

El eje de revolución se encuentra por debajo del área.



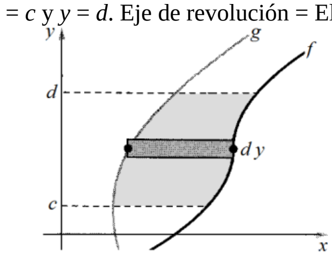
$$V = 2\pi\int_c^d (y-k)\, f(y)\,dy \qquad (8.2.20)$$

El eje de revolución se encuentra por encima del área.



$$V = 2\pi\int_c^d (k-y)\, f(y)\,dy \qquad (8.2.21)$$

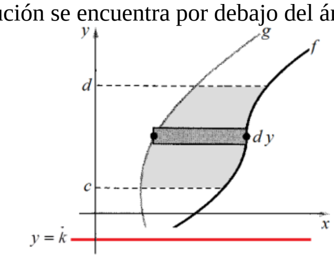
Caso 7. Región limitada a la derecha por $x = f(y)$, a la izquierda por $x = g(y)$, $y = c$ y $y = d$. Eje de revolución = El eje x:



$$V = 2\pi\int_c^d y[f(y)-g(y)]\,dy \qquad (8.2.22)$$

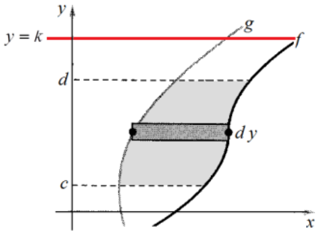
Caso 8. Región limitada a la derecha por $x = f(y)$, a la izquierda por $x = g(y)$, $y = c$, $y = d$. Eje de revolución = La recta $y = k$:

El eje de revolución se encuentra por debajo del área.



$$V = 2\pi\int_c^d (y-k)[f(y)-g(y)]\,dy \qquad (8.2.23)$$

El eje de revolución se encuentra por encima del área.



$$V = 2\pi\int_{c}^{d}(k-y)[f(y)-g(y)]\,dy \qquad (8.2.24)$$

Comparación entre los métodos de disco y de capas.

1.- Si colocamos un rectángulo perpendicular al eje de revolución del sólido, estamos escogiendo el método de discos y la variable de integración viene indicada por la anchura del rectángulo.

2.- Si colocamos un rectángulo paralelo al eje de revolución del sólido, estamos adoptando el método de capas, donde la variable de integración viene indicada por la anchura del rectángulo.

8.3.- Momentos de una lámina plana.

Sean $g(x) \le f(x)$ funciones continuas en $[a,b]$. Para la lámina plana, de densidad uniforme ρ, acotada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$, los **momentos respecto de los ejes *x*, *y*,** vienen dados por:

$$M_x = \tfrac{1}{2}\rho\int_a^b\{[f(x)]^2-[g(x)]^2\}\,dx \qquad (8.3.1)$$

$$M_y = \rho\int_a^b x[f(x)-g(x)]\,dx \qquad (8.3.2)$$

La **masa** m de la lámina viene dada a su vez por $m = \rho\int_a^b[f(x)-g(x)]\,dx$ y el **centro de masas** por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m},\quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

8.4.- Centroide de una región plana.

Sean $g(x) \le f(x)$ funciones continuas en $[a,b]$. El **centroide** $(\bar{x},\bar{y})$ de la región acotada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$ viene dado por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x[f(x)-g(x)]\,dx}{A} \qquad (8.4.1)$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b\{[f(x)]^2-[g(x)]^2\}\,dx}{A} \qquad (8.4.2)$$

8.5.- Longitud de arco.

Si $y = f(x)$ tiene derivada $f'(x)$ continua en $[a,b]$, la longitud de arco de f entre a y b viene dada por

$$L = \int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \qquad (8.5.1)$$

Análogamente, para una curva $x = g(y)$ entre c y d está dada por

$$L = \int_c^d\sqrt{1+[f'(y)]^2}\,dy \qquad (8.5.2)$$

8.6.- Área de una superficie de revolución.

Definición de superficie de revolución.

Si la gráfica de una función continua se hace girar alrededor de una recta, la superficie resultante se llama una **superficie de revolución.**

Si $y = f(x)$ tiene derivada $f'(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$, entonces el área S de la superficie de revolución que engendra esta gráfica en $[a,b]$ es

1.- Si gira en torno del eje x:

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \qquad (8.6.1)$$

2.- Si gira en torno del eje y:

$$S = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \qquad (8.6.2)$$

Si $x = f(y)$ tiene derivada $f'(y)$ continua en el intervalo $[c,d]$, entonces el área S de la superficie de revolución que engendra esta gráfica en $[c,d]$ es

1.- Si gira en torno del eje y:

$$S = 2\pi\int_c^d f(y)\sqrt{1+[f'(y)]^2}\,dy \qquad (8.6.3)$$

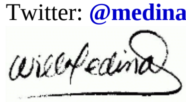
2.- Si gira en torno del eje x:

$$S = 2\pi\int_c^d y\sqrt{1+[f'(y)]^2}\,dy \qquad (8.6.4)$$

9.- El Teorema de Pappus.

Sea R una región del plano y sea L una recta de ese plano que no corta el interior de R. Si r denota la distancia del centroide de R a la recta L, el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la región R en torno a la recta L es $V = 2\pi r A$, donde A es el área de R ($2\pi r$ es la distancia recorrida por el centroide al girar la región en torno a la recta).

Autor: **MSc. Ing. Willians Medina**.
Teléfono / Whatsapp: **+58-424-9744352**
e-mail: **medinawj@gmail.com**
Twitter: **@medinawj**



El presente formulario está disponible en formato digital en la siguiente dirección:
https://www.tutoruniversitario.com/ Maturín, diciembre de 2024.