

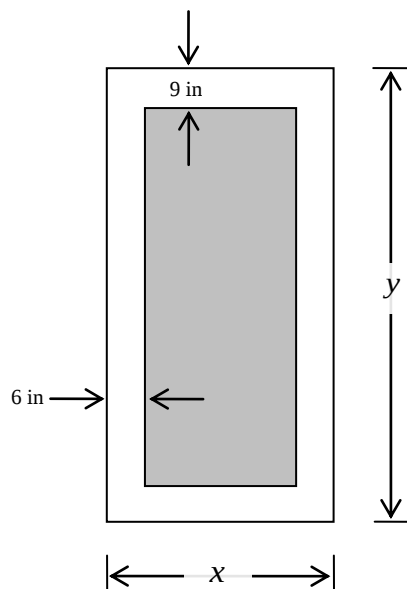
Problema Resuelto 12. Capítulo 14 del Ayres – Mendelson. Quinta Edición. Página 110.

Una hoja de papel para un cartel debe tener 18 pies cuadrados de área. Los márgenes superior e inferior han de ser de 9 pulgadas, y los márgenes de los lados, de 6 pulgadas. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de la hoja para maximizar el área impresa?

Solución.

Con el objeto de evitar trabajar con fracciones, se utilizará como unidad de medida la pulgada en lugar de pie. El área de la hoja es $18 \text{ pie}^2 = 2592 \text{ pulg}^2$

En la figura siguiente se ilustra la hoja. Las dimensiones de la hoja son x e y .



El área impresa es máxima cuando el área de la hoja es la mayor posible.

La función objetivo es el área impresa de la hoja, que se expresa de la siguiente manera:

$$A = (x - 12)(y - 18) \quad (\text{Ecuación 1})$$

En base a la condición conocida (Una hoja de papel para un cartel debe tener 18 pies cuadrados de área), se tiene:

Área de la hoja.

$$A_{\text{Hoja}} = x y$$

$$2592 = x y \quad (\text{Ecuación 2})$$

Es necesario expresar la función objetivo A en función de una sola variable. De la ecuación (2) se despeja la variable y :

$$y = \frac{2592}{x} \quad (\text{Ecuación 3})$$

Se sustituye la ecuación (3) en la ecuación (1):

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-12) \left(\frac{2592}{x} - 18 \right) \\ A(x) &= 2592 - 18x - \frac{31104}{x} + 216 \\ A(x) &= 2808 - 18x - \frac{31104}{x} \end{aligned} \quad (\text{Ecuación 4})$$

Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos.

Para un valor extremo del área:

$$\frac{dA}{dx} = 0 \quad (\text{Condición 1})$$

Al derivar la ecuación (4):

$$\frac{dA}{dx} = -18 + \frac{31104}{x^2} \quad (\text{Ecuación 5})$$

Al aplicar la condición (1):

$$-18 + \frac{31104}{x^2} = 0$$

Resolver la ecuación anterior con el objeto de determinar los valores críticos.

$$\frac{31104}{x^2} = 18$$

$$31104 = 18x^2$$

$$1728 = x^2$$

$$x^2 = 1728$$

$$x = \pm\sqrt{1728}$$

$$x = \pm 24\sqrt{3}$$

$$x_1 = -24\sqrt{3}$$

$$x_2 = 24\sqrt{3}$$

Valores críticos: $x = -24\sqrt{3}$, $x = 24\sqrt{3}$.

Puesto que se trata de números positivos, se analiza $x = 24\sqrt{3}$.

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Al derivar la ecuación (5):

$$\frac{d^2 A}{d x^2} = -\frac{62208}{x^3}$$

Al evaluar en $x = 24\sqrt{3}$:

$$\left. \frac{d^2 A}{d x^2} \right|_{x=24\sqrt{3}} = -\frac{62208}{(24\sqrt{3})^3}$$

$$\left. \frac{d^2 A}{d x^2} \right|_{x=24\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\left. \frac{d^2 A}{d x^2} \right|_{x=24\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Puesto que $\left. \frac{d^2 A}{d x^2} \right|_{x=24\sqrt{3}} < 0$, la función $A(x) = 2808 - 18x - \frac{31104}{x}$ presenta un máximo

relativo en $x = 24\sqrt{3}$.

El correspondiente valor de y se obtiene mediante la sustitución de $x = 24\sqrt{3}$ en la ecuación (3):

$$y = \frac{2592}{24\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{108}{\sqrt{3}}$$

$$y = 36\sqrt{3}$$

$$y = (36\sqrt{3})\text{in}$$

Conclusión.

Las dimensiones de la hoja son:

$$x = (24\sqrt{3})\text{in}$$

$$y = (36\sqrt{3})\text{in}$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Derivadas, Aplicaciones de las derivadas**, perteneciente a la asignatura **Cálculo Diferencial**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: medinawj@gmail.com

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.