Ejemplo 3, Sección 7.1 del Edwards. Cuarta Edición. Página 448. Problema 5c, Sección 6.1 del Boyce. Cuarta Edición. Página 314.

Demuestre que $L\{t^n\}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, en donde n es un entero positivo.

Solución.

Definición de la transformada de Laplace: $L\{f(t)\}=\lim\limits_{c\to\infty}\int_0^c e^{-st} f(t)\,dt$

En este caso $f(t)=t^n$, por lo tanto:

$$L\{e^{at}\}=\lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-st}(t^n)\,dt$$

$$L\{e^{at}\}=\lim_{c\to\infty}\int_0^c t^n e^{-st}\,dt$$

Aplicando el método tabular para resolver la integral:

u y sus derivadas sucesivas:	$d\,v$ y sus integrales sucesivas:
t^n	e^{-st}
$n\,t^{n-1}$	$-\dfrac{1}{s}e^{-st}$
$n(n-1)t^{n-2}$	$-\dfrac{1}{s^2}e^{-st}$
$n(n-1)(n-2)t^{n-3}$	$-\dfrac{1}{s^3}e^{-st}$
$\vdots$	$\vdots$
$n(n-1)(n-2)\ldots 3t^2$	$-\dfrac{1}{s^{n-2}}e^{-st}$
$n(n-1)(n-2)\ldots 2t$	$-\dfrac{1}{s^{n-1}}e^{-st}$
$n(n-1)(n-2)\ldots 2.1$	$-\dfrac{1}{s^n}e^{-st}$
0	$-\dfrac{1}{s^{n+1}}e^{-st}$

$$L\{t^n\}=\lim_{c\to\infty}\left[\begin{array}{l}-\frac{t^n\,e^{-st}}{s}-\frac{n\,t^{n-1}e^{-st}}{s^2}-\frac{n(n-1)t^{n-2}e^{-st}}{s^3}-\ldots-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3t^2e^{-st}}{s^{n-1}}\\-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2\,t\,e^{-st}}{s^n}-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1e^{-st}}{s^{n+1}}\end{array}\right|_0^c\right]$$

Al aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$$L\{t^n\}=\lim_{c\to\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}-\frac{(c)^n\,e^{-s(c)}}{s}-\frac{n(c)^{n-1}e^{-s(c)}}{s^2}-\frac{n(n-1)(c)^{n-2}e^{-s(c)}}{s^3}-\ldots-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3(c)^2e^{-s(c)}}{s^{n-1}}\\-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2\,(c)\,e^{-s(c)}}{s^n}-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1e^{-s(c)}}{s^{n+1}}\end{array}\right]-\\\left[\begin{array}{l}-\frac{(0)^n\,e^{-s(0)}}{s}-\frac{n(0)^{n-1}e^{-s(0)}}{s^2}-\frac{n(n-1)(0)^{n-2}e^{-s(0)}}{s^3}-\ldots-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3(0)^2e^{-s(0)}}{s^{n-1}}\\-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2\,(0)\,e^{-s(0)}}{s^n}-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1e^{-s(0)}}{s^{n+1}}\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$L\{t^n\}=\lim_{c\to\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}-\frac{c^n\,e^{-sc}}{s}-\frac{n\,c^{n-1}e^{-sc}}{s^2}-\frac{n(n-1)c^{n-2}e^{-sc}}{s^3}-\ldots-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3c^2e^{-sc}}{s^{n-1}}\\-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2\,(c)\,e^{-sc}}{s^n}-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1e^{-sc}}{s^{n+1}}\end{array}\right]-\\\left[\begin{array}{l}-\frac{(0)\,e^{0}}{s}-\frac{n(0)^{n-1}e^{0}}{s^2}-\frac{n(n-1)(0)\,e^{0}}{s^3}-\ldots-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3(0)\,e^{0}}{s^{n-1}}\\-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2\,(0)\,e^{0}}{s^n}-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1e^{0}}{s^{n+1}}\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$L\{t^n\}=\lim_{c\to\infty}\left\{\begin{array}{l}e^{-sc}\left[\begin{array}{l}-\frac{c^n}{s}-\frac{n\,c^{n-1}}{s^2}-\frac{n(n-1)c^{n-2}}{s^3}-\ldots-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3c^2}{s^{n-1}}\\-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2\,(c)}{s^n}-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1}{s^{n+1}}\end{array}\right]\\+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1(1)}{s^{n+1}}\end{array}\right\}$$

$$L\{t^n\}=\lim_{c\to\infty}e^{-sc}\left[\begin{array}{l}-\frac{c^n}{s}-\frac{n\,c^{n-1}}{s^2}-\frac{n(n-1)c^{n-2}}{s^3}-\ldots-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3c^2}{s^{n-1}}\\-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2\,(c)}{s^n}-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1}{s^{n+1}}\end{array}\right]$$

$$+\lim_{c\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1(1)}{s^{n+1}}$$

El primer término de la expresión anterior es cero, mientras que el segundo puede escribirse como:

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$