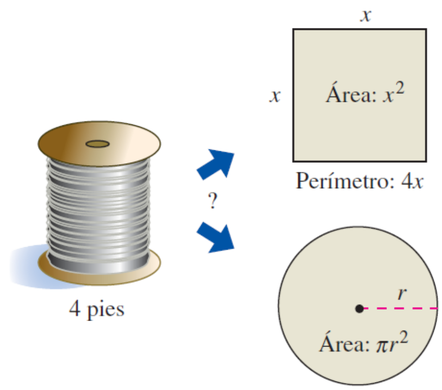
Ejemplo 5. Sección 3.7 del Larson – Hostetler. Sexta Edición. Páginas 240 – 241.

Example 5. Section 3.7 from Larson – Edwards. Ninth Edition. Page 222.

Con cuatro pies de alambre se desean construir un círculo y un cuadrado. ¿Cuánto alambre hay que emplear en cada figura para lograr que entre ambas encierren el área máxima posible?

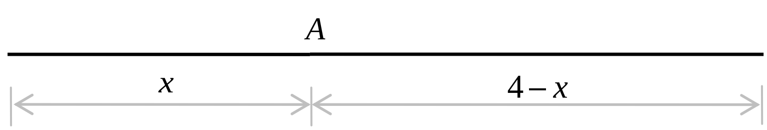


Four feet of wire is to be used to form a square and a circle. How much of the wire should be used for the square and how much should be used for the circle to enclose the maximum total area?

Solución.

Alambre:

El alambre se corta en el punto A a una distancia x del extremo izquierdo:



Se forman las siguientes figuras:

Lado del cuadrado formado:

$l = \frac{x}{4}$ (Ecuación 1)

Radio del círculo formado:

$r = \frac{4-x}{2\pi}$ (Ecuación 2)

Área de cada figura.

Cuadrado:

$A_1 = l^2$ (Ecuación 3)

Al sustituir la ecuación (1) en la ecuación (3):

$$A_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2$$

$A_1 = \frac{x^2}{16}$ (Ecuación 4)

Círculo:

$A_2 = \pi r^2$ (Ecuación 5)

Al sustituir la ecuación (2) en la ecuación (5):

$$A_2 = \pi \left(\frac{4-x}{2\pi}\right)^2$$

$A_2 = \frac{(4-x)^2}{4\pi}$ (Ecuación 6)

La función objetivo es el área total de las figuras formadas, que se expresa de la siguiente manera:

$A = A_1 + A_2$ (Ecuación 7)

Al sustituir las ecuaciones (4) y (6) en la ecuación (7):

$$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(4-x)^2}{4\pi}$$

$$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{16-8x+x^2}{4\pi}$$

$$A(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{16}{4\pi}-\frac{8x}{4\pi}+\frac{x^2}{4\pi}$$

$$A(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{4}{\pi}-\frac{2x}{\pi}+\frac{x^2}{4\pi}$$

$$A(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{x^2}{4\pi}-\frac{2x}{\pi}+\frac{4}{\pi}$$

$$A(x)=\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{4\pi}\right)x^2-\frac{2}{\pi}x+\frac{4}{\pi}$$

$$A(x)=\left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2-\frac{2}{\pi}x+\frac{4}{\pi}\,,\ 0\leq x\leq 4 \qquad \text{(Ecuación 8)}$$

Se ilustrarán dos mecanismos para obtener el extremo de la función *A*.

Primer mecanismo de solución.

La función *A* (x) es una función cuadrática. Al comparar la ecuación (8) con $A = a\,x^2 + b\,x + c$, se tiene que:

$a=\frac{\pi+4}{16\pi}$, $b=-\frac{2}{\pi}$, $c=\frac{4}{\pi}$

Siendo $a=\frac{\pi+4}{16\pi}$ ($a > 0$), la función cuadrática es cóncava hacia arriba y por lo tanto presenta un mínimo.

El valor de la abcisa que genera el punto máximo está dado por:

$$x=-\frac{b}{2a}$$

$$x=-\frac{(-\frac{2}{\pi})}{2(\frac{\pi+4}{16\pi})}$$

$$x=\frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{\pi+4}{8\pi}}$$

$$x=\frac{16}{\pi+4}$$

$x\approx 2.2404$

El valor mínimo de la función ocurre en $x=\dfrac{16}{\pi+4}$.

El alambre debe cortarse a $x=\dfrac{16}{\pi+4}$ pies de uno de sus extremos.

Conclusión.

Área mínima: El pedazo de longitud $\dfrac{16}{\pi+4}$ pies debe ser usado para construir un cuadrado y el pedazo de longitud $\dfrac{4\pi}{\pi+4}$ pies debe ser usado para construir la circunferencia.

Área máxima: El alambre no debe cortarse y construirse con él una circunferencia de radio $\dfrac{2}{\pi}$ pies.

Segundo mecanismo de solución.

Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos.

Para un valor extremo del área:

$$\frac{dA}{dx}=0 \qquad \text{(Condición 1)}$$

Al derivar la ecuación (8):

$$\frac{dA}{dx}=\left(\frac{\pi+4}{8\pi}\right)x-\frac{2}{\pi} \qquad \text{(Ecuación 9)}$$

Al aplicar la condición (1):

$$\left(\frac{\pi+4}{8\pi}\right)x-\frac{2}{\pi}=0$$

$$\left(\frac{\pi+4}{8\pi}\right)x=\frac{2}{\pi}$$

$$x=\frac{16}{\pi+4}$$

Valor crítico: $x=\dfrac{16}{\pi+4}$.

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Al derivar la ecuación (9):

$$\frac{d^2A}{dx^2}=\frac{\pi+4}{8\pi}$$

Al evaluar en $x=\dfrac{16}{\pi+4}$:

$$\left.\frac{d^2A}{dx^2}\right|_{x=\frac{16}{\pi+4}}=\frac{\pi+4}{8\pi}$$

Puesto que $\left.\dfrac{d^2A}{dx^2}\right|_{x=\frac{16}{\pi+4}}>0$, la función $A(x)=\left(\dfrac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2-\dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{4}{\pi}$ presenta un mínimo relativo en $x=\dfrac{16}{\pi+4}$.

Finalmente, aplicamos el método tabular para determinar el extremo absoluto del área. La aplicación del método tabular consiste en evaluar la función objetivo en cada valor crítico así como en los extremos del intervalo que representa el dominio de la función.

En $x = 0$:

$$A(0)=\left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)(0)^2-\frac{2}{\pi}(0)+\frac{4}{\pi}$$

$$A(0)=\frac{4}{\pi}$$

$$A\,(0)\approx 1.2732$$

En $x=\dfrac{16}{\pi+4}$:

$$A\left(\frac{16}{\pi+4}\right)=\left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)\left(\frac{16}{\pi+4}\right)^2-\frac{2}{\pi}\left(\frac{16}{\pi+4}\right)+\frac{4}{\pi}$$

$$A\left(\frac{16}{\pi+4}\right)=\frac{16}{\pi(\pi+4)}-\frac{32}{\pi(\pi+4)}+\frac{4}{\pi}$$

$$A\left(\frac{16}{\pi+4}\right)=-\frac{16}{\pi(\pi+4)}+\frac{4}{\pi}$$

$$A\left(\frac{16}{\pi+4}\right)=\frac{4}{\pi+4}$$

$$A\left(\frac{16}{\pi+4}\right)\approx 0.5601$$

En $x = 4$:

$$A(4)=\left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)(4)^2-\frac{2}{\pi}(4)+\frac{4}{\pi}$$

$$A(4)=\left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)(16)-\frac{8}{\pi}+\frac{4}{\pi}$$

$A\,(4) = 1$

x	0	$\frac{16}{\pi+4}$	4
$A\,(x)$	1.2732	0.5601	1

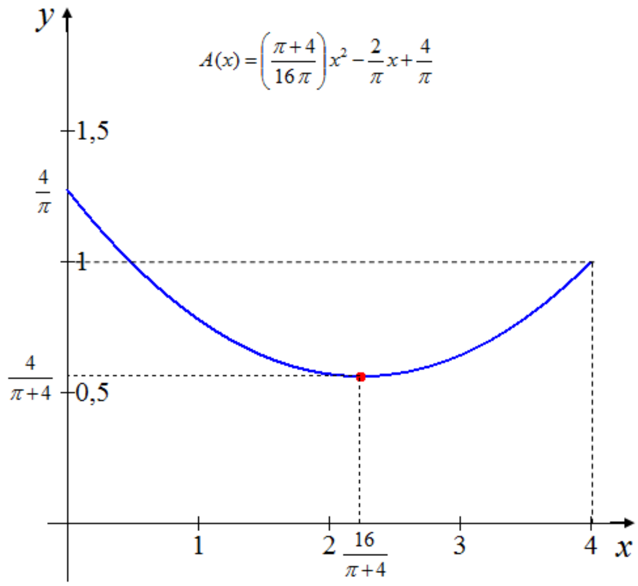
El valor mínimo de la función ocurre en $x=\frac{16}{\pi+4}$.

Conclusión.

Área mínima: El pedazo de longitud $\frac{16}{\pi+4}$ pies debe ser usado para construir un cuadrado y el pedazo de longitud $\frac{4\pi}{\pi+4}$ pies debe ser usado para construir la circunferencia.

Área máxima: El alambre no debe cortarse y construirse con él una circunferencia de radio $\frac{2}{\pi}$ pies.

En la figura siguiente se muestra la gráfica de la función área total ilustrando el valor de x que genera el mínimo valor del área.



y
$A(x)=\left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2-\frac{2}{\pi}x+\frac{4}{\pi}$
1,5
$\frac{4}{\pi}$
1
$\frac{4}{\pi+4}$
0,5
1
2
$\frac{16}{\pi+4}$
3
4
x