

Ejemplo 3. Sección 3.6 del Thomas – Finney. Novena Edición. Página 236. Example 3.
Section 3.6 from Thomas – Finney. Ninth Edition. Page 236.

Hállense dos números positivos cuya suma sea 20, y tales que su producto sea lo mayor posible.

Find two positive numbers whose sum is 20 and whose product is as large as possible.

Solución.

Sean x e y los números buscados.

Suma de ambos números: $S = x + y$

Puesto que la suma es conocida, se tiene:

$$x + y = 20 \quad \text{(Ecuación 1)}$$

La función objetivo es el producto de los números, que se expresa de la siguiente manera:

$$P = x y \quad \text{(Ecuación 2)}$$

Es necesario expresar la función objetivo P en función de una sola variable. De la ecuación (1) se despeja la variable y :

$$y = 20 - x \quad \text{(Ecuación 3)}$$

Se sustituye la ecuación (3) en la ecuación (2):

$$P(x) = x(20 - x)$$

$$P(x) = 20x - x^2$$

$$P(x) = -x^2 + 20x, 0 \leq x \leq 20 \quad \text{(Ecuación 4)}$$

Se ilustrarán dos mecanismos para obtener el extremo de la función $P(x)$.

Primer mecanismo de solución.

La función $P(x)$ es una función cuadrática. Al comparar la ecuación (4) con

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \text{ se tiene que:}$$

$$a = -1, b = 20, c = 0$$

Siendo $a = -1$ ($a < 0$), la función cuadrática es cóncava hacia abajo y por lo tanto presenta un máximo.

El valor de la abcisa que genera el punto máximo está dado por:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Al sustituir valores:

$$x = -\frac{20}{2(-1)}$$

$$x = \frac{20}{2}$$

$$x = 10$$

El correspondiente valor de y se obtiene mediante la sustitución de $x = 10$ en la ecuación (3):

$$y = 20 - 10$$

$$y = 10$$

Conclusión.

Los números buscados son:

$$x = 10$$

$$y = 10$$

Segundo mecanismo de solución.

Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos.

Para un valor extremo del producto:

$$\frac{dP}{dx} = 0 \quad (\text{Condición 1})$$

Al derivar la ecuación (4):

$$\frac{dP}{dx} = -2x + 20 \quad (\text{Ecuación 5})$$

Al aplicar la condición (1):

$$-2x + 20 = 0$$

Resolver la ecuación anterior con el objeto de determinar los valores críticos.

$$2x = 20$$

$$x = \frac{20}{2}$$

$$x = 10$$

Valor crítico: $x = 10$.

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Al derivar la ecuación (5):

$$\frac{d^2 P}{d x^2} = -2$$

Al evaluar en $x = 10$:

$$\left. \frac{d^2 P}{d x^2} \right|_{x=10} = -2$$

Puesto que $\left. \frac{d^2 P}{d x^2} \right|_{x=10} < 0$, la función $P(x) = -x^2 + 20x$ presenta un máximo relativo en $x =$

10.

El correspondiente valor de y se obtiene mediante la sustitución de $x = 10$ en la ecuación (3):

$$y = 20 - 10$$

$$y = 10$$

Finalmente, aplicamos el método tabular para determinar el extremo absoluto del producto. La aplicación del método tabular consiste en evaluar la función objetivo en cada valor crítico así como en los extremos del intervalo que representa el dominio de la función.

En $x = 0$:

$$P(0) = -(0)^2 + 20(0)$$

$$P(0) = 0$$

En $x = 10$:

$$P(10) = -(10)^2 + 20(10)$$

$$P(10) = -100 + 200$$

$$P(10) = 100$$

En $x = 20$:

$$P(20) = -(20)^2 + 20(20)$$

$$P(20) = -400 + 400$$

$$P(20) = 0$$

x	0	10	20
$P(x)$	0	100	0

El valor máximo del producto ocurre en $x = 10$.

El valor máximo del producto es: $P_{\max} = 100$.

Conclusión.

Los números buscados son:

$$x = 10$$

$$y = 10$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Aplicaciones de la derivada**, perteneciente a la asignatura **Cálculo Diferencial**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

<http://www.tutoruniversitario.com/>

Si Usted requiere la resolución de ejercicios adicionales acerca de ésta u otras asignaturas, contáctenos a través de los siguientes medios:

- WhatsApp: +58-4249744352 (En forma directa o desde nuestra página web).
- E-mail: medinawj@gmail.com

Lista de asignaturas en las cuales podemos ayudarle:

Cálculo Diferencial.	Cálculo Integral.	Cálculo Vectorial.
Ecuaciones Diferenciales.	Trigonometría.	Matemáticas Aplicadas.
Matemáticas Financieras.	Álgebra Lineal.	Métodos Numéricos.
Estadística.	Física (Mecánica).	Física (Electricidad).
Mecánica Vectorial (Estática).	Química Inorgánica.	Fisicoquímica.
Termodinámica.	Termodinámica Química.	Mecánica de Fluidos.
Fenómenos de Transporte.	Transferencia de Calor.	Ingeniería Económica.