Ejemplo 19. Ejemplo 6 del Saenz. Segunda Edición. Página 66

Calcular $\int \frac{d\,x}{x(4-\ln^2 2x)}$

Solución.

La forma de la integral no parece corresponder a una sustitución trigonométrica, sin embargo, modificaremos la integral a la forma siguiente:

$$\int \frac{d\,x}{x(4-\ln^2 2x)} = \int \frac{d\,x}{x[4-(\ln 2x)^2]}$$

Se aplica un cambio de variable:

$w = \ln 2\,x$

$$d\,w = \frac{1}{x}\,d\,x$$

Al sustituir en la integral:

$$\int \frac{d\,x}{x(4-\ln^2 2x)} = \int \frac{d\,w}{4-w^2}$$

El integrando tiene la forma $a^2 - u^2$, se hace la sustitución:

$w = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$

$d\,w = 2\cos\theta\,d\,\theta$

Al sustituir u y $d\,u$ en la integral:

$$\int \frac{d\,x}{x(4-\ln^2 2x)} = \int \frac{2\cos\theta\,d\,\theta}{4-(2\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}$$

$$\int \frac{d\,x}{x(4-\ln^2 2x)} = 2\int \frac{\cos\theta\,d\,\theta}{4-4\,\mathrm{sen}^2\theta}$$

$$\int \frac{d\,x}{x(4-\ln^2 2x)} = 2\int \frac{\cos\theta\,d\,\theta}{4(1-\mathrm{sen}^2\theta)}$$

$$\int \frac{d\,x}{x(4-\ln^2 2x)} = \tfrac{1}{2}\int \frac{\cos\theta\,d\,\theta}{\cos^2\theta}$$

Al simplificar el factor $\cos\theta$:

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \frac{1}{2}\int \sec\theta \, d\theta$$

La integración conduce a:

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \frac{1}{2}\ln(\sec\theta+\tan\theta)+C \text{ (Ecuación 1):}$$

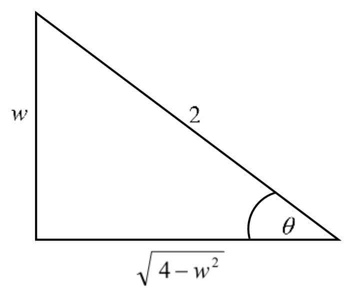
Para volver a la variable *u* se debe definir $\sec\theta$ y $\tan\theta$ en función de *u*.

Partiendo de la sustitución trigonométrica realizada:

$$w = 2\,\text{sen}\,\theta$$

$$\text{sen}\theta = \frac{w}{2} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

Se construye un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto es *w* e hipotenusa es 2. El lado faltante, se determina con la aplicación del teorema de Pitágoras.



Observe que la magnitud del lado faltante coincide con la expresión $\sqrt{4-w^2}$ que se encuentra en el integrando.

A partir del triángulo obtenido, se define $\sec\theta$ y $\tan\theta$.

$$\sec\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}}$$

$$\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{4-w^2}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$

$$\tan\theta = \frac{w}{\sqrt{4-w^2}}$$

Al sustituir en la Ecuación 1:

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{\sqrt{4-w^2}} + \frac{w}{\sqrt{4-w^2}}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{2+w}{\sqrt{4-w^2}}\right) + C$$

Al reemplazar *w* en función de *x*:

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\ln 2x}{\sqrt{4-\ln^2 2x}}\right) + C$$

Puede demostrarse que este resultado es equivalente al obtenido por Saenz en su obra:

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \tfrac{1}{4}\ln\left(\frac{\ln 2x+2}{\ln 2x-2}\right) + C$$

Demostración:

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\ln 2x}{\sqrt{4-\ln^2 2x}}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\ln 2x}{\sqrt{(2+\ln 2x)(2-\ln 2x)}}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\ln 2x}{\sqrt{2+\ln 2x}\,\sqrt{2-\ln 2x}}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2+\ln 2x}}{\sqrt{2-\ln 2x}}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \tfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{2+\ln 2x}{2-\ln 2x}}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\ln 2x}{2-\ln 2x}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \tfrac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\ln 2x}{2-\ln 2x}\right)+C$$

Si multiplicamos por –1 tanto el numerador como el denominador en el argumento del logaritmo:

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \tfrac{1}{4}\ln\left[\frac{-(2+\ln 2x)}{-(2-\ln 2x)}\right]+C$$

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \tfrac{1}{4}\ln\left[\frac{-(2+\ln 2x)}{\ln 2x-2}\right]+C$$

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \tfrac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\ln 2x}{\ln 2x-2}\right)+\tfrac{1}{4}\ln(-1)+C$$

Puesto que ln (–1) es una constante, se obtiene:

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 2x)} = \tfrac{1}{4}\ln\left(\frac{\ln 2x+2}{\ln 2x-2}\right)+C$$

Este ejercicio forma parte de una serie de ejercicios resueltos paso a paso acerca del tema **Métodos de integración-Por sustitución trigonométrica, de la asignatura Cálculo Integral**. El acceso a estos archivos está disponible a través de:

http://www.tutoruniversitario.com/